CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 20 Giugno 2013

1) Si consideri la matrice A di ordine n, con $n = 20, 40, 80$, con -1 sulla diagonale principale, 2 sulle diagonali di posizione -2 e 2, 4 sulle diagonali di posizione -1 e 1. Si vuole stimare il numero di condizionamento, $K_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1$. Ricordiamo che, per una matrice quadrata M,

$$\|M\|_1 = max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|M\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1}.$$

Per stimare la quantità $\|A^{-1}\|_1$ - senza costruire A^{-1} - si osservi che calcolare $\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{x}$ equivale a risolvere il sistema lineare $A\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Si proceda quindi nel seguente modo:

1. effettuare la decomposizione $LU = PA$;
2. generare $n/2$ vettori random $\mathbf{R}_j$, di dimensione n come segue:
   `>> rand('seed',931316785); r=rand(n,n/2);`
   dove `r` è una matrice le cui colonne sono i vettori $\mathbf{R}_j$;
3. calcolare i vettori $\mathbf{y}_j = A^{-1}\mathbf{R}_j$ utilizzando la decomposizione LU;
4. calcolare le quantità $s_j = \|\mathbf{y}_j\|_1 / \|\mathbf{R}_j\|_1$, $j = 1, ..., n/2$;
5. calcolare $\max_j s_j$ come stima di $\|A^{-1}\|_1$.

Per ogni valore di n si riportino nella tabella le quantità indicate.

n	20	40	80
$\max_j s_j$			
$\|A\|_1$			
$K_1(A) \approx$			

2) Per il calcolo degli integrali $I_k = \int_0^1 x^k e^{x-1}\, dx$, $k = 1, 2, 3, ...$ si consideri la formula ricorsiva $I_k = 1 - kI_{k-1}$, con $I_1 = 1/e$. Si calcolino i valori I_K con la formula ricorsiva e con la formula di quadratura dei trapezi compositi (I_K^{TC}) utilizzando $M = 100, 200$ sottointervalli, al variare di $K = 12, 14, 16, 18$. Compilare 4 tabelle corrispondenti ai 4 valori di K.

K	I_K	I_K^{TC}	$E_K = \|I_K - I_K^{TC}\|$
$M = 100$			
$M = 200$			

3) Il polinomio di Legendre di grado cinque è definito come segue,

$$P(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x.$$

Si vogliono calcolare gli zeri della derivata prima contenuti nell'intervallo $[-1, 1]$. Utilizzare il metodo di Newton per approssimare tali zeri utilizzando un metodo grafico per individuare opportuni punti iniziali.

- zeri trovati con il metodo di Newton e numero di iterazioni

- scelta punto iniziale