Cognome: ______________________ Nome: ______________________ Matricola: ______________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 18 giugno 2014

1) Si consideri il metodo iterativo:

$$x_0 \text{ assegnato; } \forall n \geq 1,\ x_n = x_{n-1} - \frac{[f(x_{n-1})]^2}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-1} - f(x_{n-1}))},$$

per la ricerca delle radici α e β ($\alpha < \beta$) dell'equazione non lineare $f(x) \equiv e^x - x - 2 = 0$.

Sia K il numero di iterazioni necessarie affinchè $e_K = |x_K - x_{K-1}| < 10^{-8}$.

Utilizzare $x_0 = -6$ per approssimare la radice α e $x_0 = 0$ per approssimare la radice β e riportare il valore di x_K e di e_K per le due diverse scelte di x_0.

Si vuole inoltre dedurre sperimentalmente l'ordine p del metodo. A tale scopo, per ciascuna delle due scelte di x_0, si consideri x_K come approssimazione migliore dello zero α oppure β e si calcoli la quantità

$$M_K = \frac{|x_K - x_{K-1}|}{|x_K - x_{K-2}|^p},$$

come stima rispettivamente di

$$M_\alpha = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\alpha - x_n|}{|\alpha - x_{n-1}|^p}, \quad M_\beta = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\beta - x_n|}{|\beta - x_{n-1}|^p}.$$

Per quale valore di p (si considerino i valori $p = 1, 2$), la quantità M_K tende ad un valore costante che approssima M_α oppure M_β? (non è necessario calcolare M_α, M_β).

<u>RISULTATI</u>

$x_0 = -6:$ $\alpha \approx x_K =$ $K =$ $e_K =$ $p =$

$x_0 = 0:$ $\beta \approx x_K =$ $K =$ $e_K =$ $p =$

2) Si consideri l'insieme di matrici $A_j \in \mathbb{R}^{3\times3}$:

$$A_j = \begin{pmatrix} 2+\varepsilon_j & 1 & \varepsilon_j \\ \varepsilon_j & 3+\varepsilon_j & \varepsilon_j \\ -\varepsilon_j & 3 & 6 \end{pmatrix},\ \varepsilon_j = \frac{j}{100},\ j = 0, 1, ..., 599, 600.$$

Per ogni matrice A_j, $j = 0, ..., 600$, calcolare il modulo degli autovalori di modulo minimo e massimo:

$$l_j = \min_{\{n=1,2,3\}} |\lambda_n(A_j)|, \quad L_j = \max_{\{n=1,2,3\}} |\lambda_n(A_j)|.$$

Sia $y_1 = r(\varepsilon) = a\varepsilon + b$ [risp. $y_2 = R(\varepsilon) = A\varepsilon + B$] la retta che approssima l'insieme di dati (ε_j, l_j) [risp. (ε_j, L_j)], $j = 0, ..., 600$, con il metodo dei minimi quadrati discreti di grado 1.

Calcolare gli errori:

$$e_l = \sqrt{\sum_{j=0}^{600} [l_j - r(\varepsilon_j)]^2}; \quad e_L = \sqrt{\sum_{j=0}^{600} [L_j - R(\varepsilon_j)]^2}.$$

RISULTATI

Equazioni delle rette $y_1 = r(\varepsilon)$ e $y_2 = R(\varepsilon)$:

$y_1 =$ $\qquad\qquad$ $y_2 =$

Errori:

$e_l =$ $\qquad\qquad$ $e_L =$

3) Approssimare l'integrale definito

$$I = \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x, \quad g(x) = \frac{e^x}{x^2+1},$$

mediante la formula di Cavalieri-Simpson composita con $M = 40$ sottointervalli di uguale ampiezza. Sia I_C il valore trovato.

Successivamente si consideri la formula di quadratura

$$\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \approx I(x_0) \equiv g(x_0)(b-a) + \frac{1}{2}\ g'(x_0)\left[(b-x_0)^2 - (a-x_0)^2\right],\ x_0 \in [a,b]\ \text{ assegnato.}$$

Determinare il valore $x_0^{(min)}$ tale cui risulta minima la quantità

$$E(x_0) = |I(x_0) - I_C|,$$

al variare di x_0 come elemento del vettore `[a : 0.01 : b]`.

Utilizzare $a = -1,\ b = 2$ e $a = -2,\ b = 1$.

RISULTATI

$a = -1,\ b = 2$

$I_C =$ $\qquad$ $x_0^{(min)} =$ $\qquad$ $I(x_0^{(min)}) =$ $\qquad$ $E(x_0^{(min)}) =$

$a = -2,\ b = 1$

$I_C =$ $\qquad$ $x_0^{(min)} =$ $\qquad$ $I(x_0^{(min)}) =$ $\qquad$ $E(x_0^{(min)}) =$