CALCOLO NUMERICO (18 giugno 2007)

1) Applicare il metodo di Newton all'equazione non lineare

$$f(x) \equiv x^3 - 15 = 0,$$

e, dopo avere espresso il metodo di Newton nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$, discuterne la convergenza al variare di $x_0 > 0$.

Stabilire l'ordine di convergenza del metodo.

Determinare per quali $x > 0$ risulta $|g'(x)| < 1$.

2) Data la matrice A di dimensione $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & \frac{4}{n} & 0 & ... & 0 \\ \frac{4}{n} & 4 & \frac{4}{n} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & \frac{4}{n} & 4 & \frac{4}{n} \\ 0 & ... & ... & \frac{4}{n} & 2 \end{bmatrix}, \quad n \geq 3$$

2.1) fornire una maggiorazione per $K_2(A)$ al variare di n;

2.2) costruire la matrice di iterazione del metodo di Jacobi B_J e verificare che $\|B_J\|_\infty < 1$, $\forall n \geq 3$.

3) Data la formula di quadratura

$$\tilde{I} = \alpha_1 f(-1) + \alpha_2 f(1) + \alpha_3 f''(x_1)$$

per il calcolo approssimato di

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x,$$

con $f \in C^2([-1, 1])$, determinare i pesi $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ e il nodo x_1 in modo che $\tilde{I}$ abbia grado di precisione massimo.

Stabilire successivamente il grado di precisione della formula ottenuta e utilizzarla per approssimare l'integrale definito

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ \mathrm{d}x$$

Calcolare l'errore commesso.