1) Data la funzione $f(x) = \cos \pi x + \sin \pi x$:

1.1) trovare, mediante il metodo delle differenze divise, il polinomio $p \in \mathbb{P}_2$ che interpola f nei nodi $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.75$;

1.2) dato $x_3 = 0.75$, calcolare $f(x_3)$ e $p(x_3)$ e dedurre, giustificando la risposta, qual è il polinomio interpolatore $q \in \mathbb{P}_3$ che interpola f nei nodi x_i, $i = 0, ..., 3$;

1.3) verificare infine mediante il metodo delle differenze divise che $p(x) \equiv q(x)$, $\forall x$.

MI _ 18-6-2015

x_i	1	1.5	1.75
y_i	-1	-1	0

$f(x) = \cos \pi x + \sin \pi x$

$$\begin{array}{llll}
1 & -1 & & \\
 & & 0 & \\
1.5 & -1 & & \frac{4}{0.75} = \frac{16}{3} \\
 & & \frac{1}{0.25} = 4 & \\
1.75 & 0 & &
\end{array}$$

$$p(x) = -1 + \frac{16}{3}(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right) =$$

$$-1 + \frac{16}{3}\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}\right) = \frac{16}{3}x^2 - \frac{40}{3}x + 7$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = 0 \qquad p\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\cancel{16}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{16}} - \frac{\cancel{40}^{10}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} + 7 = 3 - 10 + 7 = 0$$

$f\left(\frac{3}{4}\right) = p\left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow p$ interpola f in 4 punti $\Rightarrow$ è l'unico polinomio di grado 3 ($\mathbb{P}_2 \subset \mathbb{P}_3$) che interpola f in 4 nodi.

$$\begin{array}{llllll}
1 & -1 = a_0 & & & & \\
 & & 0 = a_1 & & & \\
1.5 & -1 & & \frac{16}{3} = a_2 & & \\
 & & 4 & & 0 = a_3 & \\
1.75 & 0 & & \frac{-4}{-\frac{3}{4}} = \frac{16}{3} & & \\
 & & 0 & & & \\
0.75 & 0 & & & &
\end{array}$$

$$q(x) = p(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$= p(x) \quad \forall x$$

2) Utilizzando la stima classica o la stima asintotica dell'errore, stimare il numero di sottointervalli M di uguale ampiezza per approssimare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx = \pi$$

con la formula dei trapezi compositi, in modo che l'errore assoluto E_M sia $< 10^{-3}$.

Calcolare $\lim_{M\to\infty} E_M$.

Milano 18-6-2015

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx \qquad H = \frac{1}{M}$$

$$f(x) = \frac{4}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-8x}{(1+x^2)^2} = -8 \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = -8\,\frac{(1+x^2)^2 - x\cdot 2x\cdot(1+x^2)\cdot 2}{(1+x^2)^4} =$$

$$= -8\,\frac{1+x^2-4x^2}{(1+x^2)^3} = -8\,\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$$

Stima classica

$$\frac{(b-a)}{12} H^2 \max_{t\in[0,1]} |f''(t)|$$

$$\left|\frac{1-3t^2}{(1+t^2)^3}\right| \le |1-3t^2| \le 2 \quad \text{(maggiorazione "non ottimale")}$$

$$\Rightarrow \text{Err} \le \frac{8\cdot 2}{12}\cdot\frac{1}{M^2} = \frac{4}{3M^2} < \frac{1}{1000} \qquad M^2 > \frac{4000}{3} \approx 1333$$

$$\Rightarrow M \geq 37$$

Stima asintotica

$$\frac{1}{12}\,\frac{1}{M^2}\left[\frac{8}{4}\right] = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{M^2} < \frac{1}{1000} \qquad M^2 > \frac{1000}{6} \approx 167$$

$$M \geq 13$$

3) Data l'equazione non lineare $f(x) \equiv x^3 - 4x = 0$, e la famiglia di metodi iterativi

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x)}{mx}, \; k \geq 0; \; x_0 \text{ dato}; \; m \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

3.1) determinare il parametro m in modo che il metodo risulti del secondo ordine per l'approssimazione della radice positiva di f.

3.2) Si studi al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ la convergenza del metodo iterativo nel caso particolare trovato al punto 3.1).

Milano
18.6.15

$f(x) = x^3 - 4x = 0 \qquad x = 0 \qquad x = \pm 2$

$g(x) = x - \dfrac{f(x)}{mx} \qquad m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Radice positiva di f: $\alpha = 2$

$g(x) = x - \dfrac{x^3 - 4x}{mx} = x - \dfrac{x^2 - 4}{m} \qquad x \neq 0$

$g'(x) = 1 - \dfrac{2x}{m}$

$g'(2) = 1 - \dfrac{4}{m} = 0 \qquad m = 4$

$g(x) = x - \dfrac{x^2 - 4}{4} = -\dfrac{x^2}{4} + x + 1$

$V(2;2)$

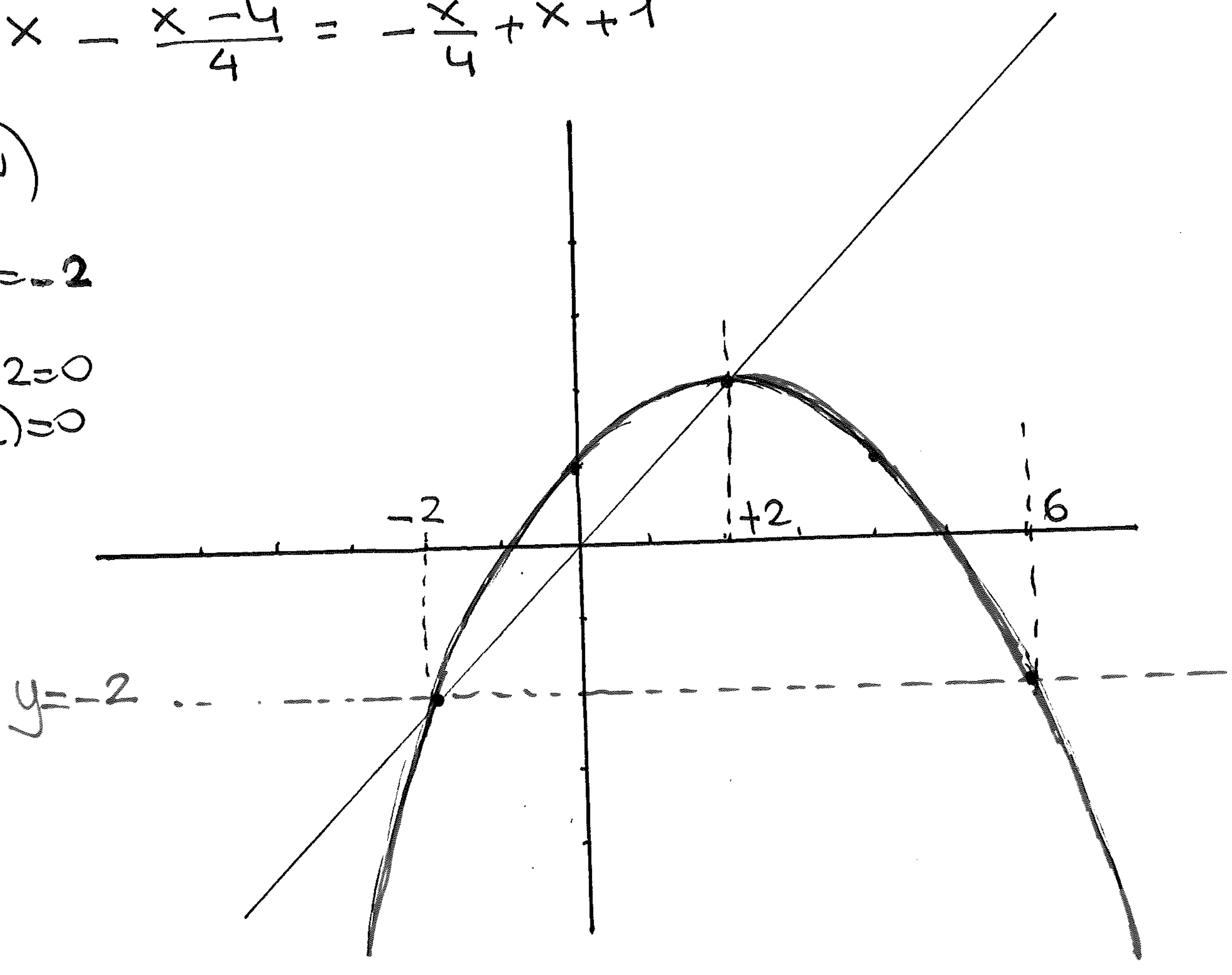
$-\dfrac{x^2}{4} + x + 1 = -2$

$-x^2 + 4x + 12 = 0$

$(x-6)(x+2) = 0$

$x = -2$

$x = 6$



Studio della convergenza del metodo $x_{n+1} = g(x_n)$

con $g(x) = -\frac{x^2}{4} + x + 1$

1) $x_0 < -2$

Successione monotona decrescente illimitata inferiormente : $x_n \searrow -\infty$

2) $x_0 = -2$ $\quad x_n = -2 \quad \forall n$

3) $-2 < x_0 < 2$

successione monotona crescente limitata superiormente da 2: $x_n \nearrow +2$ (2° ordine)

4) " $x_0 = 2$ $\quad x_n = 2 \quad \forall n$ " (Teorico)

5) $2 < x_0 < 6$ $\quad -2 < x_1 < 2 \Rightarrow$ vedi caso 3)

6) " $x_0 = 6$ $\quad x_n = -2 \quad n \geq 1$ " (Teorico)

7) $x_0 > 6$ $\quad x_1 < -2 \Rightarrow$ vedi caso 1)

Il metodo converge ad $\alpha = 2$ $\quad \forall x_0 \in (-2, 6)$.

4) Dati $\gamma \in [0,1]$ e il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con A matrice $n \times n$ di elementi
$a_{11} = a_{nn} = 1-\gamma$, $a_{1n} = a_{n1} = -\gamma$,
$a_{ii} = 1$, $i = 2, ..., n-1$,
$a_{ij} = 0$ in tutti gli altri casi,
trovare una condizione necessaria e sufficiente su γ affinchè il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I - A)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}, \quad k \geq 0,$$

converga alla soluzione $\mathbf{x}$, con $\mathbf{x}^{(0)}$ generico vettore di $\mathbb{R}^n$.

Milano

18.6.2015

$$A = \begin{bmatrix} 1-\gamma & 0 & 0\,0\,0 & -\gamma \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \quad 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ -\gamma & \dots & \dots & 1-\gamma \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \gamma & 0\,0\,0\,0 & \gamma \\ \vdots & & \\ \gamma & 0 \dots 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Calcolo autovalori di B.

$\det(B - \lambda I) = 0$

$$(-\lambda)^{n-2}\left[(\gamma-\lambda)^2 - \gamma^2\right] = 0$$

$\lambda = 0$ $(n-2)$ autovalori nulli

$$(\gamma - \lambda - \gamma)(\gamma - \lambda + \gamma) = 0$$

$\Downarrow$

$\lambda = 0$ $\qquad \lambda = 2\gamma$

$\rho(B) = |2\gamma|$

Convergenza $\iff$ $|\gamma| < \frac{1}{2}$