CALCOLO NUMERICO 1 (18 giugno 2015)
COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE

1) Data la funzione $f(x) = \cos \pi x + \sin \pi x$:

1.1) trovare, mediante il metodo delle differenze divise, il polinomio $p \in \mathbb{P}_2$ che interpola f nei nodi $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.75$;

1.2) dato $x_3 = 0.75$, calcolare $f(x_3)$ e $p(x_3)$ e dedurre, giustificando la risposta, qual è il polinomio interpolatore $q \in \mathbb{P}_3$ che interpola f nei nodi x_i, $i = 0, ..., 3$;

1.3) verificare infine mediante il metodo delle differenze divise che $p(x) \equiv q(x)$, $\forall x$.

2) Utilizzando la stima classica o la stima asintotica dell'errore, stimare il numero di sottointervalli M di uguale ampiezza per approssimare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \pi$$

con la formula dei trapezi compositi, in modo che l'errore assoluto E_M sia $< 10^{-3}$.
Calcolare $\lim_{M\to\infty} E_M$.

3) Data l'equazione non lineare $f(x) \equiv x^3 - 4x = 0$, e la famiglia di metodi iterativi

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m\ x_k},\ \ k \geq 0;\ \ x_0 \text{ dato};\ \ m \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

3.1) determinare il parametro m in modo che il metodo risulti del secondo ordine per l'approssimazione della radice positiva di f.

3.2) Si studi al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ la convergenza del metodo iterativo nel caso particolare trovato al punto 3.1).

4) Dati $\gamma \in [0, 1]$ e il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con A matrice $n \times n$ di elementi
$a_{11} = a_{nn} = 1 - \gamma$, $a_{1n} = a_{n1} = -\gamma$,
$a_{ii} = 1$, $i = 2, ..., n-1$,
$a_{ij} = 0$ in tutti gli altri casi,
trovare una condizione necessaria e sufficiente su γ affinchè il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I - A)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}, \quad k \geq 0,$$

converga alla soluzione $\mathbf{x}$, con $\mathbf{x}^{(0)}$ generico vettore di $\mathbb{R}^n$.

5) Costruire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con una radice r, $f(r) = 0$, tale che per ogni valore iniziale $x_0 \neq r$ il metodo di Newton sia applicabile, la successione generata sia limitata ma non converge mai ad r.
Costruire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con una radice r, $f(r) = 0$, tale che per ogni valore iniziale $x_0 \neq r$ il metodo di Newton sia applicabile ma la successione generata non risulti mai limitata.