Cognome: ______________________ Nome: ______________________ Matricola: ____________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 19 giugno 2015

1) Si consideri la funzione $f(x) = x^2$ per $x \in [0, 1]$.

1.1) Si calcolino i parametri c_1 e c_2 della retta $y = c_1 + c_2 x$ che approssima $f(x)$, nel senso dei minimi quadrati, nel caso di $n = 10$ e $n = 20$ punti equispaziati sull'intervallo $[0, 1]$.
Si può prevedere quanto varranno tali coefficienti per $n \to +\infty$? Siano essi denotati da $\widetilde{c}_1$ e $\widetilde{c}_2$.

1.2) Si approssimi con il metodo dei trapezi composito con $M = 10^3$ intervalli la quantità

$$F(c_1, c_2) = \int_0^1 (x^2 - c_1 - c_2 x)^2 \, dx$$

per i valori $n = 10, 20$ considerati sopra. Quanto vale invece $F(\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2)$? Si calcoli analiticamente tale integrale. Cosa se ne deduce?

<u>RISULTATI</u>

$n = 10:\ c_1 =$ $\qquad\qquad$ $c_2 =$

$n = 20:\ c_1 =$ $\qquad\qquad$ $c_2 =$

$n \to +\infty:\ \widetilde{c}_1 =$ $\qquad\qquad$ $\widetilde{c}_2 =$

$n = 10:\ F(c_1, c_2) =$ $\qquad\qquad$ $n = 20:\ F(c_1, c_2) =$ $\qquad\qquad$ $n \to +\infty:\ F(\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2) =$

commento:

2) Si consideri la matrice a blocchi

$$A = \begin{bmatrix} B & -I & 0 \\ -I & B & -I \\ 0 & -I & B \end{bmatrix},$$

dove 0 e I sono, rispettivamente, la matrice nulla e la matrice identità $\in R^{3\times 3}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b}$ scelto in modo che la soluzione esatta sia $\mathbf{x} = (1, 1, \ldots, 1)^T$.

2.1) Si dica, senza costruire le rispettive matrici di iterazione, perché i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel per l'approssimazione della soluzione del sistema lineare sono convergenti

2.2) Si approssimi la soluzione del sistema con i metodi di Jacobi e Gauss–Seidel, prendendo `toll=1e-6`, `nmax=200`, come guess iniziale il vettore nullo e utilizzando come test d'arresto $\|A\mathbf{x}^k - \mathbf{b}\|_2 <$ `toll` . In quante iterazioni convergono i due metodi, rispettivamente?

2.3) Si dia una motivazione del diverso numero di iterazioni ottenute con i due metodi al punto precedente

RISULTATI

2.1) Giustificazione della convergenza

2.2) nr. iterazioni Jacobi: Gauss-Seidel:

2.3) motivazione:

3) Approssimare l'unica radice dell'equazione $f(x) \equiv e^{x^2} - 1 = 0$, avente molteplicità 2, con i seguenti metodi iterativi:

3.1) il metodo di Newton applicato alla funzione f;

3.2) il metodo di Newton applicato alla funzione $\Phi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$;

3.3) il metodo di Newton modificato applicato alla funzione f:

$$x_n = x_{n-1} - 2\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Per tutti tre i casi si utilizzi $x_0 = 0.5$, test d'arresto $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-6}$. Si riporti per ciascun metodo il numero di iterazioni `it` e la soluzione approssimata $x_{\texttt{it}}$. Dedurre l'ordine dei metodi, giustificando le risposte.

	`it`	$x_{\texttt{it}}$	ordine
metodo 3.1)			
metodo 3.2)			
metodo 3.3)			

Giustificazione teorica dell'ordine dei metodi