CALCOLO NUMERICO 1 (16 Giugno 2016) - Prova scritta

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

1) Assegnati i nodi $x_i = i-1$, $i = 0,1,2,3$ e i valori $y_0 = 1$, $y_1 = -1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 3$, determinare il polinomio p di interpolazione nei nodi x_i, $i = 0,1,2$ e il polinomio q di interpolazione nei nodi x_i, $i = 1,2,3$. Determinare i coefficienti a e b del polinomio $r(x) = ax+b$ in modo che il polinomio

$$t(x) = r(x)p(x) + (1-r(x))q(x)$$

verifichi $t(x_i) = y_i$, $\forall i = 0,1,2,3$.

x_i	-1	0	1	2
y_i	1	-1	1	3

$$\begin{array}{cccc}
-1 & 1 = a_0 & & \\
 & & -2 = a_1 & \\
0 & -1 & & \frac{4}{2} = 2 = a_2 \\
 & & 2 & \\
1 & 1 & &
\end{array}$$

$$p(x) = 1 - 2(x+1) + 2(x+1)x = 2x^2 - 1$$

$$\begin{array}{cccc}
0 & -1 = a_0 & & \\
 & & 2 = a_1 & \\
1 & 1 & & 0 = a_2 \\
 & & 2 & \\
2 & 3 & &
\end{array}$$

$$q(x) = -1 + 2x$$

$$t(x) = (ax+b)(2x^2-1) + (1-ax-b)(2x-1)$$

$$t(-1) = (-a+b) + (1+a-b)(-3) = -4a+4b-3 = \overset{(y_0)}{1} \qquad \boxed{-a+b=1}$$

$$t(0) = -b-1+b = -1 \qquad -1 = \overset{(y_1)}{-1} \quad \forall a,b$$

$$t(1) = (a+b) + (1-a-b) = 1 \qquad 1 = \overset{(y_2)}{1} \quad \forall a,b$$

$$t(2) = (2a+b)7 + (1-2a-b)3 = 8a+4b+3 = \overset{(y_3)}{3} \qquad \boxed{2a+b=0}$$

$$\begin{cases} -a+b = 1 \\ 2a+b = 0 \end{cases}$$

$$3a = -1$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

$$b = \frac{2}{3}$$

$$r(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

2) Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3 + 12x}{3x^2 + 4},$$

studiare al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ la convergenza e l' ordine del metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$.

MI 16/6/16

$$g(x) = \frac{x^3+12x}{3x^2+4} = x \qquad x^3+12x-3x^3-4x=0$$

$$2x^3-8x=0 \qquad x=0 \quad x=\pm 2$$

3 punti fissi $\quad \alpha=-2;\ \beta=0;\ \gamma=2$

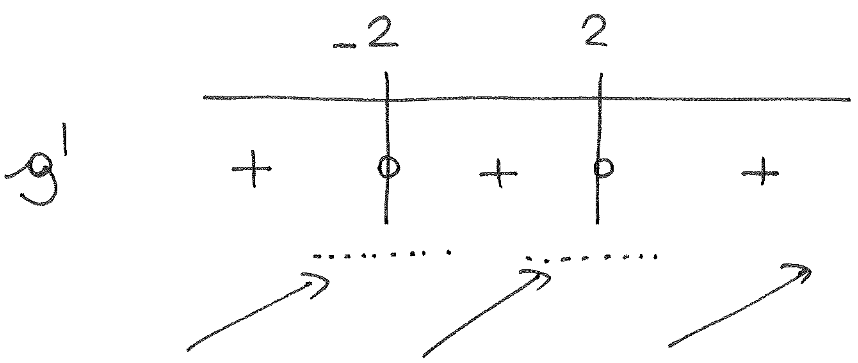
ASINTOTO OBLIQUO

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+12x}{3x^2+4}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{3} \qquad q = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+12x}{3x^2+4} - \frac{1}{3}x = 0$$

$$y = \frac{1}{3}x$$

$$g' = \frac{(3x^2+12)(3x^2+4)-6x(x^3+12x)}{(3x^2+4)^2} = \frac{9x^4+36x^2+12x^2+48-6x^4-72x^2}{(3x^2+4)^2}$$

$$= \frac{3x^4-24x^2+48}{(3x^2+4)^2} = 3\cdot\frac{x^4-8x^2+16}{(3x^2+4)^2} = \frac{3(x^2-4)^2}{(3x^2+4)^2} = \frac{3(x+2)^2(x-2)^2}{(3x^2+4)^2}$$



Punti fissi α, γ : $\quad g'(\alpha) = g'(\gamma) = 0$

con molteplicità 2

$g''(\alpha) = g''(\gamma) = 0$

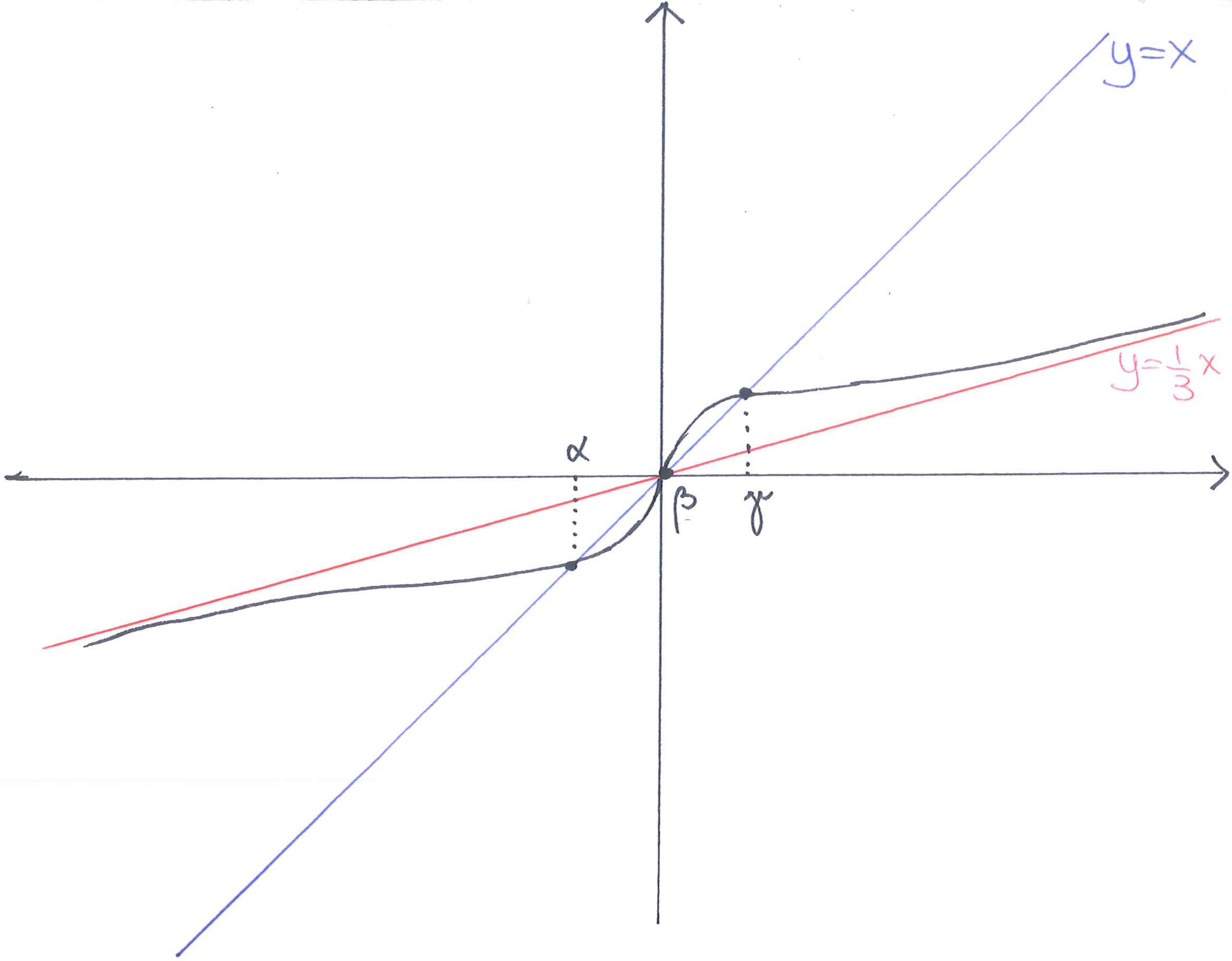
con molteplicità 1

$g'''(\alpha) \neq 0 \quad g'''(\gamma) \neq 0$

3° ordine

$$g'(0) = \frac{3\cdot 16}{16} = 3 > 1$$

Non converge in $I(0)$



$x_0<\alpha$: succ. mon cresc. lim. sup da α : $x_n \nearrow \alpha$

$\alpha<x_0<\beta$: " " decr lim inf da α : $x_n \searrow \alpha$

$\beta<x_0<\gamma$: " " cresc. lim sup. da γ : $x_n \nearrow \gamma$

$x_0>\gamma$ " " decr. lim inf da γ : $x_n \searrow \gamma$

$x_0 < \beta$: $x_n \to \alpha$

$x_0 = \beta$: $x_n = \beta$

$x_0 > \beta$: $x_n \to \gamma$

3) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

MILANO 16/6/2016

e il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{3,1}$, trovare una condizione necessaria e sufficiente su $\omega \in \mathbb{R}$ affinchè il metodo iterativo:

$$L\mathbf{x}^{(k+1)} = L\mathbf{x}^{(k)} + \omega(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}), \; k \geq 0, \; \mathbf{x}^{(0)}\text{dato},$$

sia convergente.

Matrice di iterazione $\quad B = I - \omega L^{-1}A$

$$\det(B - \lambda I) = \det(I - \omega L^{-1}A - \lambda I) = 0$$

$$\det(-\omega L^{-1}A + L^{-1}L - \lambda L^{-1}L) = 0$$

$$\det L^{-1} \; \det(-\omega A + (1-\lambda)L) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} -2\omega + 2 - 2\lambda & \omega & 0 \\ \omega - 1 + \lambda & -2\omega - 2\lambda + 2 & \omega \\ 0 & \omega - 1 + \lambda & -2\omega - 2\lambda + 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$2(1-\omega-\lambda)\begin{vmatrix} 2(1-\omega-\lambda) & \omega \\ -(1-\omega-\lambda) & 2(1-\omega-\lambda) \end{vmatrix} +$$

$$-\omega\begin{vmatrix} -(1-\omega-\lambda) & \omega \\ 0 & 2(1-\omega-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$2(1-\omega-\lambda)\left[4(1-\omega-\lambda)^2+\omega(1-\omega-\lambda)\right]+\omega\cdot 2(1-\omega-\lambda)^2=0$$

$$(1-\omega-\lambda)^2\left[8(1-\omega-\lambda)+4\omega\right]=0$$

$$(1-\omega-\lambda)^2(8-4\omega-8\lambda)=0$$

$$\lambda=1-\omega$$

$$\Rightarrow \rho(B_\omega)<1$$

$$8\lambda=8-4\omega \qquad \lambda=1-\frac{\omega}{2} \qquad \max\left\{|1-\omega|,\left|1-\frac{\omega}{2}\right|\right\}<1$$

$$|1-\omega|<1 \qquad \begin{cases}1-\omega<1\\1-\omega>-1\end{cases} \qquad 0<\omega<2$$

$$\left|1-\frac{\omega}{2}\right|<1 \qquad \begin{cases}1-\frac{\omega}{2}<1\\1-\frac{\omega}{2}>-1\end{cases} \qquad \begin{cases}\omega>0\\\omega<4\end{cases} \qquad 0<\omega<4$$

$$\Downarrow$$

$$0<\omega<4$$

4) Stimare il numero minimo di intervalli necessari per approssimare l'integrale definito

$$I \equiv \int_{\frac{1}{2}}^{3} xe^{-2x}\, dx$$

con un errore assoluto $\leq 10^{-6}$, utilizzando la formula dei trapezi composita e la stima asintotica dell'errore.

MILANO
16/6/2016

Stima: $\left| \frac{H^2}{12} \left[f'(a) - f'(b) \right] \right| =$

$$\frac{1}{12} \cdot \left(\frac{3-\frac{1}{2}}{M} \right)^2 \left| \left[f'\left(\tfrac{1}{2}\right) - f'(3) \right] \right|$$

$$f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} = e^{-2x}(1-2x)$$

$$f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = e^{-1} \cdot 0 = 0$$

$$f'(3) = e^{-6}(-5)$$

Stima: $\frac{1}{12} \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{M^2} \cdot \frac{5}{e^6} < 10^{-6}$

$$M^2 > \frac{125}{48\, e^6\, 10^{-6}} \simeq 6455$$

$$M > 80.34\ldots$$

$$\overline{M} = 81$$

5) Si consideri la formula di quadratura di Gauss-Legendre con $n \geq 1$ nodi x_i, $i = 1, ..., n$, e pesi α_i,

$$I_{GL} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \approx \int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

Dimostrare che $\alpha_i > 0$ per ogni $i = 1, ..., n$.

MILANO 16/6/16

Formula di G.L. a n nodi $\Rightarrow$

Grado di precisione $2n-1$.

$L_k(x) \equiv$ polinomio di Lagrange di grado $n-1$ relativo al nodo x_k

$[L_k(x)]^2 \in \mathbb{P}_{2n-2} \Rightarrow f(x) = [L_k(x)]^2$ (formula G.L. esatta)

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i [L_k(x_i)]^2 = \alpha_k$$

$$\int_{-1}^{1} [L_k(x)]^2 dx > 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_k > 0$$