CALCOLO NUMERICO 1 (16 Giugno 2016) - Prova scritta

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

1) Assegnati i nodi $x_i = i - 1,\ i = 0, 1, 2, 3$ e i valori $y_0 = 1,\ y_1 = -1,\ y_2 = 1,\ y_3 = 3$, determinare il polinomio p di interpolazione nei nodi $x_i,\ i = 0, 1, 2$ e il polinomio q di interpolazione nei nodi $x_i,\ i = 1, 2, 3$. Determinare i coefficienti a e b del polinomio $r(x) = ax + b$ in modo che il polinomio

$$t(x) = r(x)p(x) + (1 - r(x))q(x)$$

verifichi $t(x_i) = y_i,\ \forall i = 0, 1, 2, 3$.

2) Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3 + 12x}{3x^2 + 4},$$

studiare al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ la convergenza e l' ordine del metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$.

3) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

e il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{3,1}$, trovare una condizione necessaria e sufficiente su $\omega \in \mathbb{R}$ affinchè il metodo iterativo:

$$L\mathbf{x}^{(k+1)} = L\mathbf{x}^{(k)} + \omega(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}),\ k \geq 0,\ \mathbf{x}^{(0)}\text{dato},$$

sia convergente.

4) Stimare il numero minimo di intervalli necessari per approssimare l'integrale definito

$$I \equiv \int_{\frac{1}{2}}^{3} xe^{-2x}\ \mathrm{d}x$$

con un errore assoluto $\leq 10^{-6}$, utilizzando la formula dei trapezi composita e la stima asintotica dell'errore.

5) Si consideri la formula di quadratura di Gauss-Legendre con $n \geq 1$ nodi $x_i,\ i = 1, ..., n$, e pesi α_i,

$$I_{GL} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \approx \int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

Dimostrare che $\alpha_i > 0$ per ogni $i = 1, ..., n$.