CALCOLO NUMERICO 1 (22 giugno 2017)

Mate

1) Date le funzioni

$$f(x) = (x-1)^2, \quad g(x) = \sin \frac{3}{2}\pi x,$$

stabilire quale funzione è meglio condizionata in $x = \frac{1}{2}$.

$$K_f(x) = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{x \cdot 2(x-1)}{(x-1)^2} \right| = \left| \frac{2x}{x-1} \right|$$

$$K_f\left(\frac{1}{2}\right) = \left| \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} \right| = 2$$

$$K_g(x) = \left| \frac{x\, g'(x)}{g(x)} \right| = \left| \frac{x \cdot \frac{3}{2}\pi \cdot \cos \frac{3}{2}\pi x}{\sin \frac{3}{2}\pi x} \right|$$

$$K_g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\pi \left| \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right| = \frac{3}{4}\pi$$

$$K_g\left(\frac{1}{2}\right) > K_f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{3}{4}\pi > 2$$

2) Data la funzione $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$ e il metodo iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m x_k^2}, \ k \geq 0, \ m \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

per ogni radice di f avente molteplicità uguale ad uno, trovare i valori di m per i quali il metodo converge (localmente) a tale radice almeno con ordine due.

M1 Mate

22|6|2017

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$x = 0$ moltepl. $= 2$

$x = 1$
$x = 2$ moltepl $= 1$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{mx^2} = x - \frac{\cancel{x^2}(x^2 - 3x + 2)}{m\cancel{x^2}} =$$

$$= x - \frac{x^2 - 3x + 2}{m}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{2x - 3}{m}$$

$$g'(1) = 1 - \frac{2-3}{m} = 1 + \frac{1}{m} = 0 \qquad m = -1$$

$$g'(2) = 1 - \frac{4-3}{m} = 1 - \frac{1}{m} = 0 \qquad m = 1$$

Facoltativo. ORDINE > 2?

$m = -1 \qquad g'(x) = 1 + 2x - 3 \qquad g''(x) = 2 \neq 0$

$m = +1 \qquad g'(x) = 1 - (2x - 3) \qquad g''(x) = -2 \neq 0$

$m = \pm 1$ ORDINE 2

3) Determinare α e β affinchè la formula di quadratura

$$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x \approx \alpha f(0) + \beta\alpha f(1) + \beta\alpha f(2) + \alpha f(3)$$

abbia grado di precisione massimo. Stabilire il grado di precisione della formula ottenuta.

MI 22/6/2017

Mate

- $r=0 \quad f(x)=1$

$$\int_0^3 1 \cdot dx = 3 \qquad \alpha + \beta\alpha + \beta\alpha + \alpha = 3$$

$$2\alpha + 2\beta\alpha = 3 \iff \alpha + \beta\alpha = \frac{3}{2}$$

- $r=1 \quad f(x)=x$

$$\int_0^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{9}{2} \qquad \cancel{\alpha \cdot 0} + \beta\alpha \cdot 1 + \beta\alpha \cdot 2 + \alpha \cdot 3 = \frac{9}{2}$$

$$3\beta\alpha + 3\alpha = \frac{9}{2}$$

$$\beta\alpha + \alpha = \frac{3}{2}$$

- $r=2 \quad f(x)=x^2$

$$\int_0^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 9 \qquad \cancel{\alpha \cdot 0^2} + \beta\alpha \cdot 1^2 + \beta\alpha \cdot 2^2 + \alpha \cdot 3^2 = 9$$

$$5\beta\alpha + 9\alpha = 9$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta\alpha = \frac{3}{2} \\ 9\alpha + 5\beta\alpha = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5\alpha + 5\beta\alpha = \frac{3}{2} \cdot 5 \\ 9\alpha + 5\beta\alpha = 9 \end{cases}$$

$$4\alpha = 9 - \frac{15}{2}$$

$$4\alpha = \frac{3}{2} \qquad \alpha = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{8} + \frac{3}{8}\beta = \frac{3}{2} \qquad \frac{3}{8}\beta = \frac{3}{2} - \frac{3}{8} \qquad \frac{3}{8}\beta = \frac{9}{8} \qquad \beta = 3$$

formula

$$\int_0^3 f(x)\,dx \approx \frac{3}{8}f(0)+\frac{9}{8}f(1)+\frac{9}{8}f(2)+\frac{3}{8}f(3)$$

controllo del grado di precisione

- $r=3$? $f(x)=x^3$

$$\int_0^3 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^3 = \frac{81}{4}$$

FQ. $\cancel{\frac{3}{8}\cdot 0^3} + \frac{9}{8} + \frac{9}{8}\cdot 2^3 + \frac{3}{8}\cdot 3^3 =$

$$\frac{9}{8}+9+\frac{81}{8} = \frac{90}{8}+9 = \frac{45}{4}+9 = \frac{45+36}{4} = \frac{81}{4}$$

G.P. ≥ 3

- $r=4$ $f(x)=x^4$

$$\int_0^3 x^4\,dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^3 = \frac{243}{5}$$

FQ. $\cancel{\frac{3}{8}\cdot 0^4} + \frac{9}{8} + \frac{9}{8}\cdot 2^4 + \frac{3}{8}\cdot 3^4 =$

$$\frac{9}{8}+18+\frac{243}{8} = \frac{252+18\cdot 8}{8} = \frac{396}{8} = \frac{99}{2} \neq \frac{243}{5}$$

G.P. $=3$

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -1 & 1 & -1 \\ -1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}, a \neq 0,\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{3,1},$$

M1 Mate

22|6|2017

determinare una condizione necessaria e sufficiente su a affinchè:

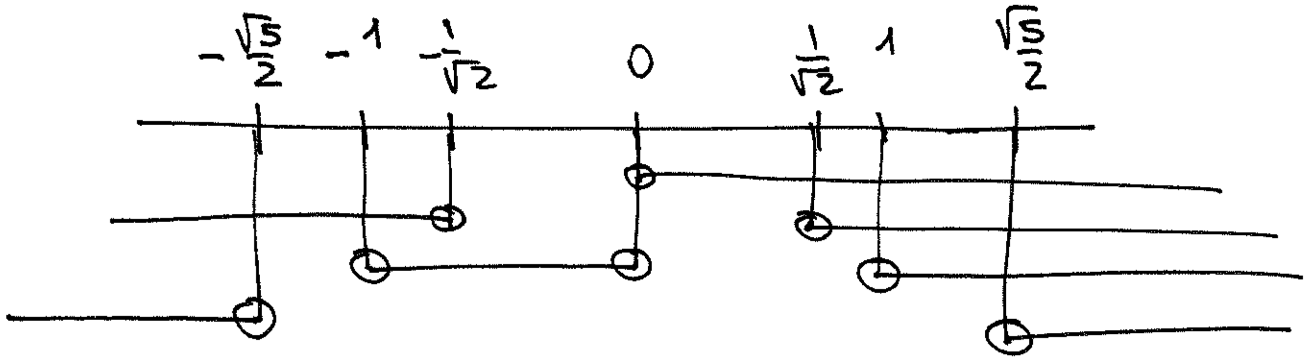
4.1) la matrice A sia definita positiva;

4.2) il metodo di Jacobi converga;

4.3) il metodo di Gauss-Seidel converga.
Stabilire la relazione fra le velocità asintotiche di convergenza dei due metodi (Jacobi e Gauss-Seidel). Discutere, senza eseguire calcoli, il problema della fattorizzazione della matrice A.

4.1) $\begin{cases} 2a > 0 \\ 2a^2 - 1 > 0 \\ \det A_3 > 0 \\ \det A_4 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0 \\ |a| > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -a + a(2a^2 - 1) > 0 \\ 4a^4 - 5a^2 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0 \\ |a| > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2a^3 - 2a > 0 \\ a^2(4a^2 - 5) > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a > 0 \\ a < -\frac{1}{\sqrt{2}} \cup a > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a(a^2 - 1) > 0 \\ a^2(4a^2 - 5) > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ -1 < a < 0 \cup a > 1 \\ a < -\frac{\sqrt{5}}{2} \cup a \ \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$



$a > \frac{\sqrt{5}}{2}$

Jacobi

$$\det \begin{bmatrix} 2a\lambda & -1 & 1 & -1 \\ -1 & a\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2a\lambda \end{bmatrix} = \dots = 4a^4\lambda^4 - 5a^2\lambda^2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2\lambda^2(4a^2\lambda^2 - 5) = 0$$

$\lambda = 0 \quad \lambda = \pm\sqrt{\frac{5}{4a^2}} \qquad \rho(B_J) = \sqrt{\frac{5}{4a^2}} < 1$

$a^2 > \frac{5}{4} \qquad a < -\frac{\sqrt{5}}{2} \lor a > \frac{\sqrt{5}}{2}$

G. Seidel

$$\det \begin{bmatrix} 2a\lambda & -1 & 1 & -1 \\ -\lambda & a\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & a\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 2a\lambda \end{bmatrix} = 4a^4\lambda^4 - 5a^2\lambda^3 =$$

$$a^2\lambda^3(4a^2\lambda - 5) = 0$$

$\lambda = 0 \quad \lambda = \frac{5}{4a^2} \qquad \rho(B_{GS}) = \frac{5}{4a^2} < 1$

stesse condizioni del met. di Jacobi

- $R(B_{GS}) = 2R(B_J)$
- Fattorizzazione LU: fenomeno fill-in

5) Data $f(x) = \sin(2\pi x)$, sia $p_n(x)$ il polinomio di grado $n \geq 1$ che interpola f in $n+1$ nodi equispaziati dell'intervallo $[0,2]$. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq x\leq 2} |f(x) - p_n(x)|.$$

MI 22/6/2017

Mate

$$f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)$$

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

$$x_0, x_1, \dots, x_n, x \in [0,2]$$

$$\underbrace{\max_{0\leq x\leq 2} |f(x)-p_n(x)|}_{E} \leq \underbrace{\max_{0\leq x\leq 2} |\omega(x)|}_{A} \cdot \underbrace{\max_{0\leq t\leq 2} |f^{(n+1)}(t)|}_{B} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$$

A: $\leq 2^{n+1}$

B: $f(t) = \sin 2\pi t$

$f'(t) = 2\pi \cos 2\pi t$

$f''(t) = -4\pi^2 \operatorname{sen} 2\pi t$

$|f^{(n+1)}(t)| \leq (2\pi)^{n+1}$

$$E \leq \frac{2^{n+1} \cdot (2\pi)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(4\pi)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$