CALCOLO NUMERICO 1 (22 giugno 2017)

1) Date le funzioni

$$f(x) = (x-1)^2, \quad g(x) = \sin \frac{3}{2}\pi x,$$

stabilire quale funzione è meglio condizionata in $x = \frac{1}{2}$.

2) Data la funzione $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$ e il metodo iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m x_k^2}, \ k \geq 0, \ m \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

per ogni radice di f avente molteplicità uguale ad uno, trovare i valori di m per i quali il metodo converge (localmente) a tale radice almeno con ordine due.

3) Determinare α e β affinchè la formula di quadratura

$$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x \approx \alpha f(0) + \beta\alpha f(1) + \beta\alpha f(2) + \alpha f(3)$$

abbia grado di precisione massimo. Stabilire il grado di precisione della formula ottenuta.

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -1 & 1 & -1 \\ -1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}, a \neq 0, \ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{4,1},$$

determinare una condizione necessaria e sufficiente su a affinchè:

4.1) la matrice A sia definita positiva;

4.2) il metodo di Jacobi converga;

4.3) il metodo di Gauss-Seidel converga.

Stabilire la relazione fra le velocità asintotiche di convergenza dei due metodi (Jacobi e Gauss-Seidel). Discutere, senza eseguire calcoli, il problema della fattorizzazione della matrice A.

5) Data $f(x) = \sin(2\pi x)$, sia $p_n(x)$ il polinomio di grado $n \geq 1$ che interpola f in $n+1$ nodi equispaziati dell'intervallo $[0, 2]$. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq x\leq 2} |f(x) - p_n(x)|.$$