Cognome: ______________________ Nome: ______________________ Matricola: ____________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 23 giugno 2017

1) Si considerino le seguenti coppie di dati:

x	0	3	5	8	13
y	0	72	121	206	331

1.1) si usi una spline *not-a-knot* per interpolare i dati assegnati. Sia essa $S_3(x)$. Quanto vale $S_3(x)$ per $x = 10$?

1.2) Si determini per quali valori delle ascisse, se ve ne sono, la derivata prima di $S_3(x)$, detta $S_3'(x)$, è inferiore al valore 24.

1.3) Quale è il valore massimo (in modulo) della derivata seconda di $S_3(x)$, detta $S_3''(x)$, nell'intervallo $x \in [0, 13]$?

RISULTATI

valore $S_3(10)$=

range ascisse per cui $S_3'(x) < 24$:

$\max_{x\in[0,13]} |S_3''(x)|$=

2) Sia

$$I = \int_{\Omega} \log(x)\, dx,$$

con $\Omega = (0, 1)$.

2.1) Si approssimi I con la formula di Gauss-Legendre a due nodi, ricordando che sull'intervallo di riferimento $\widehat{\Omega} = (-1, 1)$ la posizione dei nodi di quadratura è, rispettivamente, $\widehat{x} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $i = 1, 2$ e il peso di quadratura è, rispettivamente, $\widehat{w}_i = 1$, $i = 1, 2$. Detta Q_1 la approssimazione ottenuta, si calcoli l'errore $|I - Q_1|$.

2.2) Si implementi ora una versione composita del metodo sopra illustrato, considerando successivamente $n = [10,\ 20,\ 40,\ 80]$ suddivisioni del dominio Ω, in ciascuna delle quali si usi la formula di quadratura di Gauss-Legendre a due nodi. Dette le corrispondenti approssimazioni $Q_n, n = 10, 20, 40, 80$, si calcolino gli errori $|I - Q_n|$ per $n = 10, 20, 40, 80$ e i rapporti $|Q_{2n}/Q_n|$ per $n = 10, 20, 40$.

I= $|I - Q_1|$=

n	10	20	40	80
$\lvert I - Q_n\rvert$				
$\lvert Q_{2n}/Q_n\rvert$				/

3) Per ogni $n = 20, 40, 60, 80, 100$ si consideri la matrice A di elementi

$$a_{ii} = 2n,\ i = 1, ..., n,$$
$$a_{ij} = 2n + 2, \text{ se } i = j + 1,\ \ j = 1, ..., n - 1,$$
$$a_{ij} = n - 2, \text{ se } j = i + 3,\ \ i = 1, ..., n - 3,$$
$$a_{ij} = 1, \text{ altrimenti.}$$

3.1) Fattorizzare la matrice A e utilizzare la fattorizzazione per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{b}$ è un vettore avente tutti elementi uguali a 1. Calcolare la quantità $r_{[n]} = \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$, $n = 20, 40, 60, 80, 100$.

3.2) Costruire la matrice $C = A^3$ e la matrice D di elementi $d_{ij} = (a_{ij})^3,\ i, j = 1, ..., n$. Calcolare le quantità:

$$e_{[n]} = \|C - D\|_2, \quad c_{[n]} = \frac{K_2(C)}{K_2(D)}, \quad d_{[n]} = \frac{\rho(C)}{\rho(D)}, \quad n = 20, 40, 60, 80, 100,$$

e le medie aritmetiche M_c e M_d, rispettivamente, dei valori $c_{[n]}$ e $d_{[n]}$.

RISULTATI

$M_c =$ $\qquad\qquad\qquad$ $M_d =$

	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 80$	$n = 100$
$r_{[n]}$					
$e_{[n]}$					