1) Calcolare i coefficienti $a,\ b,\ c,\ d$, in modo tale che la funzione $s : [+3, 5] \to \mathbb{R}$, definita da

$$s(x) = \begin{cases} 2(x-3) + 4(x-3)^2 - (x-3)^3 & x \in [3,4) \\ a + b(x-4) + c(x-4)^2 + d(x-4)^3 & x \in [4,5] \end{cases}$$

sia una spline cubica sulla suddivisione $\{3, 4, 5\}$ che soddisfa la condizione $s'(3) = s'(5)$.

M1
12.6.18

$$s'(x) = \begin{cases} 2 + 8(x-3) - 3(x-3)^2 & x \in [3,4) \\ b + 2c(x-4) + 3d(x-4)^2 & x \in [4,5] \end{cases}$$

$$S(4^-) = 2+4-1 = 5$$
$$S(4^+) = a$$
$$\Rightarrow a = 5$$

$$s'(4^-) = 2+8-3 = 7$$
$$s'(4^+) = b$$
$$\Rightarrow b = 7$$

$$s''(x) = \begin{cases} 8 - 6(x-3) & x \in [3,4) \\ 2c + 6d(x-4) & x \in [4,5] \end{cases}$$

$$S''(4^-) = 8-6 = 2$$
$$S''(4^+) = 2c$$
$$\Rightarrow c = 1$$

$$S'(3) = 2$$
$$S'(5) = 7 + 2 + 3d$$
$$\Rightarrow 9 + 3d = 2$$
$$d = -\frac{7}{3}$$

2) Sia α radice semplice dell'equazione non lineare $f(x) = 0$. Posto

$$g(x) = x - \frac{1}{2}u(x)\,[3 - u'(x)]\,, \quad u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)},$$

verificare che il metodo iterativo

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad x_0 \text{ dato,}$$

converge localmente ad α ed è almeno di ordine 3.

MI 12.6.18

$f(\alpha) = 0$

$u(\alpha) = 0$

$$u'(x) = \frac{[f'(x)]^2 - f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2} = 1 - \frac{f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2}$$

$u'(\alpha) = 1$

$$g(\alpha) = \alpha - \frac{1}{2}\cancel{u(\alpha)}[3 - u'(\alpha)] = \alpha$$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2}u'(x)[3 - u'(x)] - \frac{1}{2}u(x)[-u''(x)] =$$

$$g'(\alpha) = 1 - \frac{1}{2}\cdot 1(3-1) - \frac{1}{2}\cdot 0 = 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \text{convergenza locale}$$

$$g''(x) = -\frac{3}{2}u''(x) + \frac{1}{2}\cdot 2u'(x)u''(x) + \frac{1}{2}u'(x)u''(x) + \frac{1}{2}u(x)u'''(x)$$

$$g''(\alpha) = -\frac{3}{2}u''(\alpha) + u''(\alpha) + \frac{1}{2}u''(\alpha) = 0$$

Il metodo è almeno di ordine 3

3) Dato l'integrale definito

$$\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$$

stimare quanti sottointervalli di uguale ampiezza M_p sono necessari, affinchè l'errore assoluto della formula dei trapezi compositi sia minore di 10^{-p}, $p \geq 1$ intero. Si utilizzi la stima classica dell'errore.

M1 12.6.18

$$\int_1^2 x^2 \ln x \, dx - I_c^T = -\frac{1}{12} H^2 (b-a) f''(\eta) \qquad \eta \in (1,2)$$

$$H = \frac{b-a}{M} = \frac{1}{M}$$

$$|I - I_c^T| \leq \frac{1}{12} \frac{1}{M^2} \max_{1 \leq t \leq 2} |f''(t)| < 10^{-p}$$

$$f(t) = t^2 \ln t$$

$$f'(t) = 2t \ln t + t^2 \cdot \frac{1}{t} = 2t \ln t + t = t(2 \ln t + 1)$$

$$f''(t) = 2 \ln t + 1 + t\left(\frac{2}{t}\right) = 2 \ln t + 3$$

$$\max_{1 \leq t \leq 2} |f''(t)| = 2 \ln 2 + 3$$

$$\frac{1}{12} \frac{1}{M^2} (2 \ln 2 + 3) < 10^{-p}$$

$$M^2 > \underbrace{\frac{2 \ln 2 + 3}{12}}_{\simeq 0.3655} \cdot 10^{p}$$

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}, \ A \text{ non singolare},$$

determinare tutti e soli i valori di a per i quali i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono e si stabilisca la relazione fra le velocità di convergenza dei due metodi.

Successivamente, dopo aver calcolato la fattorizzazione $A = LU$ (senza applicare la tecnica del pivoting), rappresentare graficamente la quantità $\|U\|_\infty$ al variare di a.

HI 12.6.18

A non singolare:

$\det A = 4 - 3a \neq 0 \quad a \neq \frac{4}{3}$

- $\det \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & a \\ 1 & \lambda & 0 \\ 3 & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = \lambda(4\lambda^2 - 3a) = 0 \qquad \lambda = 0 \quad \lambda^2 = \frac{3a}{4} \qquad \rho(B_J) = \frac{\sqrt{3|a|}}{2}$

M. di J converge $\iff |a| < \frac{4}{3}$

- $\det \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & a \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 3\lambda & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = \lambda(4\lambda^2 - 3a\lambda) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 0 \quad \lambda = \frac{3a}{4} \qquad \rho(B_{GS}) = \frac{3}{4}|a|$

M. di GS converge $\iff |a| < \frac{4}{3}$

$R(B_{GS}) = 2R(B_J)$ (velocità di convergenza)

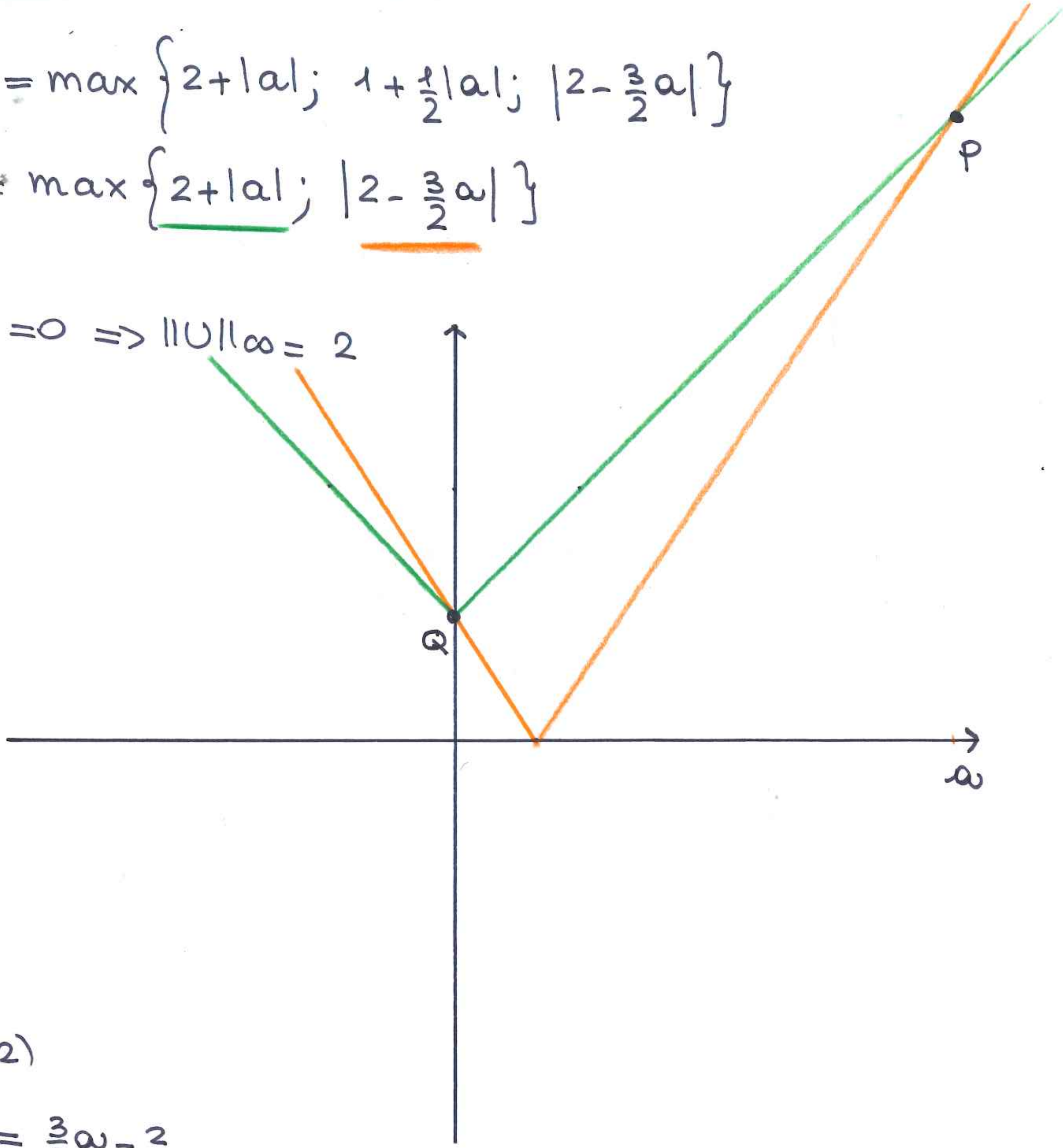
$m_{21} = \frac{1}{2} \qquad a_{22}^{(2)} = 1 \qquad a_{23}^{(2)} = -\frac{1}{2}a$

$m_{31} = \frac{3}{2} \qquad a_{32}^{(2)} = 0 \qquad a_{33}^{(2)} = 2 - \frac{3}{2}a$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}a \\ 0 & 0 & 2 - \frac{3}{2}a \end{bmatrix}$$

$$\|U\|_\infty = \max\left\{2+|a|;\ 1+\tfrac{1}{2}|a|;\ |2-\tfrac{3}{2}a|\right\}$$
$$= \max\left\{\underline{2+|a|};\ \underline{|2-\tfrac{3}{2}a|}\right\}$$

NB $a=0 \Rightarrow \|U\|_\infty = 2$



$Q(0;2)$

$2+a = \frac{3}{2}a - 2$

$\frac{a}{2} = 4$

$a = 8$

$P(8;10)$

$$\|U\|_\infty = \begin{cases} |2-\frac{3}{2}a| & a<0 \cup a>8 \\ 2+|a| & 0<a<8 \\ 2 & a=0 \\ 10 & a=8 \end{cases}$$