CALCOLO NUMERICO 1 (12 giugno 2018)

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Calcolare i coefficienti $a,\ b,\ c,\ d$, in modo tale che la funzione $s : [3, 5] \to \mathbb{R}$, definita da

$$s(x) = \begin{cases} 2(x-3) + 4(x-3)^2 - (x-3)^3 & x \in [3,4) \\ \\ a + b(x-4) + c(x-4)^2 + d(x-4)^3 & x \in [4,5] \end{cases}$$

sia una spline cubica sulla suddivisione $\{3, 4, 5\}$ che soddisfa la condizione $s'(3) = s'(5)$.

2) Sia α radice semplice dell'equazione non lineare $f(x) = 0$. Posto

$$g(x) = x - \frac{1}{2}u(x)\left[3 - u'(x)\right], \quad u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)},$$

verificare che il metodo iterativo

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad x_0 \text{ dato},$$

converge localmente ad α ed è almeno di ordine 3.

3) Dato l'integrale definito

$$\int_1^2 x^2 \ln x \mathrm{d}x$$

stimare quanti sottointervalli di uguale ampiezza M_p sono necessari, affinchè l'errore assoluto della formula dei trapezi compositi sia minore di 10^{-p}, $p \geq 1$ intero. Si utilizzi la stima classica dell'errore.

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}, \ A \text{ non singolare},$$

determinare tutti e soli i valori di a per i quali i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono e si stabilisca la relazione fra le velocità di convergenza dei due metodi.

Successivamente, dopo aver calcolato la fattorizzazione $A = LU$ (senza applicare la tecnica del pivoting), rappresentare graficamente la quantità $\|U\|_\infty$ al variare di a.

5) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua con le sue derivate di ogni ordine, $\{x_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, una successione di punti distinti ($x_i \neq x_j$ per $i \neq j$). Sia $f_N[x_1,\ x_2, \ldots, x_N]$ la differenza divisa costruita dai primi N valori x_j. Dimostrare che se f è un polinomio di grado p allora esiste un m intero tale che $f_N[x_1,\ x_2, \ldots, x_N] = 0$ per $N \geq m$.