CALCOLO NUMERICO (13 giugno 2018)

1) Sia data la matrice di Hilbert $A \in R^{5\times 5}$ e si consideri il prodotto (detto problema diretto)

$$Ax_{in} = x_{out}$$

dove $x_{in} = (1, 1, 1, 1, 1)^t$.

1.1) Si esegua il prodotto diretto definito sopra per $k = 1, \dots, 10^4$, considerando per ciascuna ripetizione al posto del vettore x_{in} una sua perturbazione data da $\widetilde{x}^k_{in} = x_{in} + 10^{-2}\sin(kx_{in})$. Sia $\widetilde{x}^k_{out}$ il vettore risultante e si definiscano, per $k = 1, \dots, 10^4$, le quantità

$$e^k_{in} = \frac{||\widetilde{x}^k_{in} - x_{in}||_2}{||x_{in}||_2}, \quad e^k_{out} = \frac{||\widetilde{x}^k_{out} - x_{out}||_2}{||x_{out}||_2}, \quad S^k = \frac{e^k_{out}}{e^k_{in}}.$$

Si calcoli $S := \max_k S^k$

1.2) Si consideri ora il problema inverso, ovvero: dato x_{out}, calcolare x_{in} risolvendo il sistema lineare $Ax_{in} = x_{out}$. Si risolva il problema inverso considerando, per $k = 1, \dots, 10^4$, il termine noto perturbato $\widetilde{x}^k_{out} = x_{out} + 10^{-2}\sin(kx_{out})$ (si usi a questo scopo il comando \ di Matlab). Si definisca in questo caso $S^k = e^k_{in}/e^k_{out}$. Quanto vale $S := \max_k S^k$?

Cosa si deduce da questi risultati?

RISULTATI

problema diretto: $S =$

problema inverso: $S =$

spiegazione risultati

2) Si vuole approssimare uno degli zeri reali della funzione $f(x) = x^4 + x - \alpha$, con α parametro reale, tramite un metodo di punto fisso con funzione di iterazione

$$g(x) = \frac{\alpha}{1 + x^3}$$

2.1) Considerando i valori di $\alpha = 2^i$ con `i=-10:2:10` con i parametri `toll=1e-5, nmax=300, x0=0` e test di arresto basato sulla differenza tra due iterate successive, si calcoli il numero massimo di iterazioni richieste dal metodo per la approssimazione dello zero.

2.2) Cosa si osserva? Si motivi il comportamento del metodo (non è necessario uno studio teorico)

RISULTATI

α	2^{-10}	2^{-8}	2^{-6}	2^{-4}	2^{-2}	0	2^{2}	2^{4}	2^{6}	2^{8}	2^{10}
punto fisso											

motivazione:

3) Sia $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ e si voglia approssimare

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}(a(\sinh(b) - \sinh(a)) + b\sqrt{b^2+1} - a\sqrt{a^2+1})$$

con i metodi del punto medio, trapezi e Simpson semplici, rispettivamente.

3.1) Sia $a = 1, b = 1.2$. Quanto vale l'errore per ciascuno dei tre metodi?

3.2) Sia ora $a = 0, b = 2$. Quanto vale ora l'errore?

3.3) Si dia una spiegazione dei risultati ai punto precedenti basandosi sulla stima teorica dell'errore

RISULTATI $a = 1, b = 1.2$, errore:
punto medio trapezi Simpson

$a = 0, b = 2$, errore:
punto medio trapezi Simpson

spiegazione: