1) Data la funzione $f(x) = x^4 - x^3 + x - 1$,

1.1) dimostrare che ha un'unica radice positiva α e che $\alpha \in I = [1/2, 2]$;

1.2) studiare la convergenza del metodo di Newton per il calcolo di α al variare di $x_0 \in I$;

1.3) mostrare che la funzione $g(x) = x^4 - x^3 + 2x - 1$ ha come punti fissi gli zeri della funzione f. Il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ converge ad α se $x_0 \in I$? Giustificare la risposta (non è richiesto lo studio grafico).

MI 19-6-19

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1-2+8-16}{16} = -\frac{9}{16} < 0$$

$$f(2) = 16 - 8 + 2 - 1 = 9 > 0$$

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1 > 0 \qquad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} > 0$$

Si osservi $x^3(x-1) + x - 1 = 0$
$x = \pm 1$; $g'(1) = 4 - 3 + 2 = 3 > 1$
Dunque il met. it. non converge ad $\alpha = 1$ se $x_0 \in I$ (diverg. locale)

$$f'(2) = 32 - 12 + 1 = 21 > 0$$

$$f''(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x-1) \geq 0 \quad x \in I$$

Dunque f' è una funzione crescente, quindi $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$
$\hookrightarrow \exists! \, \alpha \in I$ t.c. $f(\alpha) = 0$

$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

$$\left|\frac{f(1/2)}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}\right| = \frac{9}{16} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3}{4} < \left(2 - \frac{1}{2}\right) \qquad \left|\frac{f(2)}{f'(2)}\right| = \frac{9}{21} < \left(2 - \frac{1}{2}\right)$$

Il metodo di Newton converge all'unica radice $\alpha \in I$ $\forall x_0 \in I$

1.3) $g(x) = x \qquad x^4 - x^3 + 2x - 1 = x \qquad x^4 - x^3 + x - 1 = 0 \ (f(x) = 0)$

$$g'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$$

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + 2 > 1$$

$$g'(2) = 4 \cdot 8 - 3 \cdot 4 + 2 > 1$$

$$g''(x) = 12x^2 - 6x > 0 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

$$g''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$\Rightarrow g'(x)$ è una funzione crescente $x \in I$

$g'\left(\frac{1}{2}\right) > 1 \Rightarrow g'(x) > 1 \quad x \in I \Rightarrow$

Il metodo iterativo non converge per nessun $x_0 \in I$

2) Data la matrice tridiagonale A di dimensione $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2/n & 0 & \dots & 0 \\ 2/n & 2 & 2/n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 2/n & 2 & 2/n \\ 0 & \dots & 0 & 2/n & 1 \end{bmatrix}, \; n \geq 3$$

2.1) fornire una maggiorazione di $K_2(A)$ al variare di n;

2.2) costruire la matrice di iterazione del metodo di Jacobi B_J, calcolare $\|B_J\|_\infty$ per $n \geq 3$ e spiegare perchè il metodi di Jacobi è convergente.

rel 19-6-19

La matrice è simmetrica $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

1° Teorema di Gershgorin

$$\begin{cases} |\lambda - 4| \leq \frac{2}{n} \\ |\lambda - 2| \leq \frac{4}{n} \\ |\lambda - 1| \leq \frac{2}{n} \end{cases} \qquad \begin{cases} 4 - \frac{2}{n} \leq \lambda \leq 4 + \frac{2}{n} \\ 2 - \frac{4}{n} \leq \lambda \leq 2 + \frac{4}{n} \\ 1 - \frac{2}{n} \leq \lambda \leq 1 + \frac{2}{n} \end{cases}$$

$$\min_{n \geq 3} \left\{ 4 - \frac{2}{n}, 1 - 2/n, 2 - \frac{4}{n} \right\} = 1 - \frac{2}{n} > 0 \quad (n \geq 2)$$

$\Rightarrow A$ def. positiva

$1 - \frac{2}{n} \leq 2 - \frac{4}{n} \qquad \frac{2}{n} \leq 1 \qquad n \geq 2 \;\big|\; 2 - \frac{4}{n} \leq 4 - \frac{2}{n} \qquad -\frac{2}{n} \leq 2$

$$\max_{n \geq 3} \left\{ 4 + \frac{2}{n}; 2 + \frac{4}{n}; 1 + \frac{2}{n} \right\} = 4 + \frac{2}{n}$$

$4 + \frac{2}{n} \geq 2 + \frac{4}{n} \qquad 2 \geq \frac{2}{n} \qquad n \geq 1$

$$\frac{\max \lambda}{\min \lambda} \leq \frac{4 + \frac{2}{n}}{1 - \frac{2}{n}} = \frac{4n+2}{n} \cdot \frac{n}{n-2} = \frac{4n+2}{n-2}$$

OSS. $\frac{4n+2}{n-2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 4 \qquad \frac{4n+2}{n-2} \leq 14$

$\left(\frac{4n+2}{n-2} \text{ è decrescente rispetto a } n \right)$

$$B_J = + D^{-1}(E+F)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & & & & \\ & \frac{1}{2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2/n & & & \\ -\frac{2}{n} & 0 & -2/n & & \\ & \ddots & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -2/n \\ & & & -\frac{2}{n} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2n} & & & \\ -\frac{1}{n} & 0 & -\frac{1}{n} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \\ & & & -\frac{2}{n} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|B_J\|_\infty = \max\left\{ \frac{1}{2n} ; \frac{2}{n} ; \frac{2}{n} \right\} = \frac{2}{n} < 1 \quad \text{se } n>2$$

Vero, essendo $n \geq 3$

$\rho(B_J) \leq \|B_J\| \quad \forall \|\cdot\|$ naturale

$\Rightarrow \rho(B_J) < 1 \Rightarrow$ Il metodo di Jacobi converge.

(... oppure si osserva che la matrice A è diag. dom.

$4 > \frac{2}{n} \quad n > \frac{1}{2}$

$2 > \frac{4}{n} \quad n > 2$

$1 > \frac{2}{n} \quad n > 2 \quad \dots$

indipendentemente dal calcolo di $\|B_J\|_\infty$ ...)

3) Data la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \alpha_1 f(-1) + \alpha_2 f(1) + \alpha_3 f''(x_1)$$

con $f \in C^2([-1,1])$, determinare i pesi α_1, α_2, α_3 e il nodo x_1 in modo che tale formula abbia grado di precisione massimo.

MI

19-6-19

$r=0 \quad f(x)=1 \quad f'(x)=f''(x)=0 \quad \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$

$\alpha_1+\alpha_2=2$

$r=1 \quad f(x)=x \quad f'(x)=1 \quad f''(x)=0 \quad \int_{-1}^{1} x\,dx=0$

$\alpha_1(-1)+\alpha_2(1)=0 \qquad \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=1$

$r=2 \quad f(x)=x^2 \quad f'(x)=2x \quad f''(x)=2 \quad \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$

$(-1)^2+1^2+\alpha_3\cdot 2=\frac{2}{3} \qquad 2\alpha_3=\frac{2}{3}-2 \qquad \alpha_3=-\frac{2}{3}$

$r=3 \quad f(x)=x^3 \quad f'(x)=3x^2 \quad f''(x)=6x \quad \int_{-1}^{1} x^3\,dx=0$

$-1+1-\frac{2}{3}\cdot 6x_1=0 \qquad x_1=0$

Grado max: $f(x)=x^4 \quad f'(x)=4x^3; \ f''(x)=12x^2$

$r=4 \quad \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$

$1+1 \neq \frac{2}{5} \qquad \Rightarrow \qquad r=3$

4) Siano $f(x) = x^2 + 3x + 1$, $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 3$ e $y_i = f(x_i)$, $i = 1, \dots, 5$. Determinare il valore della costante $\bar{C} \in \mathbb{R}$ che realizzi la migliore approssimazione nel senso della norma euclidea, ovvero realizzi il minimo della funzione

$$E(C) = \sum_{i=1}^{5} (y_i - C)^2$$

$(x_i, y_i) = (x_i, f(x_i))$ $\quad i = 1, \dots, 5 \quad f(x) = x^2 + 3x + 1$

x_i	-2	-1	0	1	3
y_i	-1	-1	1	5	19

19-6-19

$$\min_{C \in \mathbb{R}} E(C) = \min_{C \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{5} (y_i - C)^2$$

$$E'(C) = \sum_{i=1}^{5} \cancel{2}(y_i - C)(-1) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{5} (C - y_i) \geq 0 \qquad 5C - \sum_{i=1}^{5} y_i \geq 0$$

$$C \geq \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} y_i$$

$$\bar{C} = M(Y) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} y_i = \frac{1}{5}(-1 - 1 + 1 + 5 + 19) =$$

$$\frac{1}{5} \cdot 23 = \frac{23}{5}$$