CALCOLO NUMERICO (19 giugno 2019)

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Data la funzione $f(x) = x^4 - x^3 + x - 1$,

1.1) dimostrare che ha un'unica radice positiva α e che $\alpha \in I = [1/2, 2]$;

1.2) studiare la convergenza del metodo di Newton per il calcolo di α al variare di $x_0 \in I$;

1.3) mostrare che la funzione $g(x) = x^4 - x^3 + 2x - 1$ ha come punti fissi gli zeri della funzione f. Il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ converge ad α se $x_0 \in I$? Giustificare la risposta (non è richiesto lo studio grafico).

2) Data la matrice tridiagonale A di dimensione $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2/n & 0 & \dots & 0 \\ 2/n & 2 & 2/n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 2/n & 2 & 2/n \\ 0 & \dots & 0 & 2/n & 1 \end{bmatrix}, \ n \geq 3$$

2.1) fornire una maggiorazione di $K_2(A)$ al variare di n;

2.2) costruire la matrice di iterazione del metodo di Jacobi B_J, calcolare $\|B_J\|_\infty$ per $n \geq 3$ e spiegare perchè il metodi di Jacobi è convergente.

3) Data la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x \ \approx \alpha_1 f(-1) + \alpha_2 f(1) + \alpha_3 f''(x_1)$$

con $f \in C^2([-1, 1])$, determinare i pesi α_1, α_2, α_3 e il nodo x_1 in modo che tale formula abbia grado di precisione massimo.

4) Siano $f(x) = x^2 + 3x + 1$, $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 3$ e $y_i = f(x_i)$, $i = 1, \dots, 5$. Determinare il valore della costante $\bar{C} \in \mathbb{R}$ che realizzi la migliore approssimazione nel senso della norma euclidea, ovvero realizzi il minimo della funzione

$$E(C) = \sum_{i=1}^{5} (y_i - C)^2$$

5) Sia $f \in C^2([a, b])$ una funzione reale; $N \geq 2$ intero, S_N^1 la funzione spline lineare interpolante nei nodi della suddivisione $x_k = a + k\Delta_N$, $k = 0, ..., N$, $\Delta_N = (b - a)/N$; $E_N = \max |f(x) - S_N^1(x)|$, dove $x \in [a, b]$. VERO (fornire una dimostrazione) o FALSO (fornire un controesempio) che

$$\lim_{N \to \infty} E_N = 0$$