

**CALCOLO NUMERICO - (14 luglio 2005)**

1) Sia

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & x > 0 \\ \sqrt{2}e^x & x \leq 0 \end{cases}.$$

Studiare la convergenza del metodo iterativo

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k \geq 0$$

al variare di  $x_0 \in \mathbf{R}$ . Qual'è l'ordine di convergenza?

2) Sia  $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$ . Calcolare il polinomio dei minimi quadrati discreti di grado 1 relativo ai nodi  $\{-2, 0, 1, 2\}$  e verificare che passa per il punto di coordinate  $(M_x, M_y)$ , dove

$$M_x = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i, \quad M_y = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 f(x_i).$$

3) Sia  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha \neq 1$ . Si consideri la formula di quadratura

$$\int_0^2 f(x) dx \approx \omega_1 f(0) + \omega_2 f(1) + \omega_3 f(\alpha).$$

Trovare  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  in funzione di  $\alpha$ , in modo che la formula considerata abbia grado di precisione  $\geq 2$ .

4) Dimostrare la stima asintotica dell'errore associata alla formula di quadratura dei trapezi composti.

5) Si consideri il sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , con

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2a \\ 0 & a & a^2 \end{bmatrix}.$$

5.1) Studiare in funzione di  $a > 0$  la convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel.

5.2) Quale dei due metodi ha convergenza più rapida? Giustificare la risposta.

5.3) Sia  $a = 3$ ,  $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ . Si supponga di applicare 20 iterazioni del metodo di Jacobi. Dare una stima dell'errore relativo

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(20)} - \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}.$$