CALCOLO NUMERICO (13 luglio 2006)

1) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$$

fornire una condizione necessaria e sufficiente affinchè:

1.1) A sia definita positiva;

1.2) il metodo di Jacobi converga;

1.3) Il metodo di Gauss-Seidel converga.

Nel caso particolare $\alpha = \beta > 1$ calcolare $\|A\|_2$.

2) Data la funzione $f(x) = 2\sin x$, utilizzare il procedimento delle differenze divise per calcolare il polinomio di terzo grado $p_3(x)$ che interpola $f(x)$ nei punti $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$. Utilizzando la formula della rappresentazione dell'errore, stimare infine l'errore di interpolazione

$$\max_{x\in[0,3\pi/2]} |f(x) - p_3(x)| \ .$$

3) Si vuole approssimare l'unica radice reale α dell'equazione non lineare $f(p) \equiv p^3 - 21 = 0$.

Dimostrare che i metodi iterativi di punto fisso

$$(*) \quad p_{n+1} = \frac{1}{21}\left(20p_n + \frac{21}{p_n^2}\right)$$

$$(**) \quad p_{n+1} = p_n - \frac{p_n^3 - 21}{3p_n^2} \quad \text{(metodo di Newton)}$$

$n \geq 0$, convergono ad α per ogni scelta di p_0 in un intorno opportuno di α (non è richiesto lo studio grafico).

Determinare l'ordine di convergenza dei due metodi.

Dimostrare infine che il metodo di Newton converge ad α $\forall p_0 \in [2, 4]$.

4) (*Solo per gli studenti del corso avanzato*)

Dare la definizione di famiglia di polinomi ortogonali, descriverne le proprietà e le applicazioni nel calcolo numerico.