CALCOLO NUMERICO (9 luglio 2007)

1) Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x} \ ,$$

1.a) interpolarla con un polinomio $p(x)$ di grado 2 nei punti $1, 2, 3$, usando il metodo di Lagrange; esprimere il polinomio così trovato nella forma $a_2x^2 + a_1x + a_0$.

1.b) stimare l'errore massimo di interpolazione sull'intervallo $[1, 3]$:

$$E = \max_{x\in[1,3]} |f(x) - p(x)| \ .$$

1.c) stimare l'errore che si commetterebbe interpolando la funzione con una spline lineare a due sottointervalli relativa agli stessi nodi 1, 2, 3.

2) Data la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita a tratti

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} - 1 & x > 0 \\ x/2 & x \leq 0 \ , \end{cases}$$

si consideri il metodo di punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$, con x_0 assegnato.

2.1) Si studi graficamente la convergenza del metodo al variare del punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$, e si indichi l'ordine di convergenza

2.2) Si discuta in generale il problema del test d'arresto per i metodi iterativi di punto fisso.

3) E' data la matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con elementi a_{ij} definiti da:

$$a_{ij} = \begin{cases} n^2 & i = j \\ \min(i, j) & i > j \\ 0 & i < j \end{cases}$$

3.1) Scrivere esplicitamente la matrice scegliendo $n = 4, 5, 6$.

3.2) Esprimere la quantità $\|A\|_\infty$ in funzione di n.

3.3) Costruire esplicitamente la matrice di iterazione B_J del metodo di Jacobi ed esprimere la quantità $\|B_J\|_\infty$ in funzione di n. Dimostrare che $\|B_J\|_\infty < 1, \ \forall n \geq 1$.