

CALCOLO NUMERICO (15 luglio 2008)

- 1) Sia data la formula di quadratura

$$\int_1^3 f(x)dx \simeq \alpha_1 f(1) + \alpha_2 f''(2) + \alpha_3 f(3) ,$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ parametri reali. Si calcolino i valori dei tre parametri per i quali la formula ha grado di precisione massimo e si indichi quanto vale tale grado di precisione.

- 2) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con A matrice $n \times n$ tridiagonale di elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} 2a & \text{se } i = j, \\ 1 & \text{se } i = j + 1, \\ -a^2 & \text{se } j = i + 1, \end{cases} \quad a \neq 0 :$$

- 2.1) calcolare $\|A\|_1$ e determinare per quali valori di a risulta $\|A\|_1 = 4$;
2.2) costruire la matrice di iterazione B_J del metodo di Jacobi e dimostrare che $\|B_J\|_1 \geq 1$, $\forall a \neq 0$;
2.3) nel caso $n = 3$ dimostrare che i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel sono convergenti, $\forall a \neq 0$, e calcolare la velocità asintotica di convergenza dei due metodi.

- 3) Sia dato il problema di risolvere l'equazione non lineare $f(x) = 0$, con

$$f(x) \equiv x^2 - 2 \cos x.$$

- 3.1) Dimostrare che esiste una sola soluzione positiva $\alpha \in I = (\pi/4, \pi/2)$, e che il metodo di Newton converge alla radice α per ogni scelta del valore iniziale $x_0 \in I$.
3.2) Determinare il numero di iterazioni \bar{k} del metodo di bisezione necessarie per approssimare α in modo che $|x_{\bar{k}} - \alpha| < 0.01$, partendo dall'intervallo I .
4) (*Solo per gli studenti del corso avanzato*). Descrivere il metodo per la costruzione delle formule di quadratura di tipo Gauss-Legendre, giustificando i vari passaggi del procedimento.