

CALCOLO NUMERICO (13 luglio 2009)

1) Si scriva una function MATLAB che, dati in input una funzione f , due numeri reali a, b , con $a < b$, ed un intero n , approssimi l'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$ con la formula dei trapezi composta su n sottointervalli di $[a, b]$ di uguale ampiezza.

2) Applicare il metodo di Newton all'equazione non lineare $e^x(x - 2) = 0$, e, dopo avere espresso il metodo di Newton nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$, discuterne la convergenza al variare di $x_0 > 1$.

Stabilire l'ordine di convergenza del metodo.

3) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 6 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

3.1) calcolare la fattorizzazione LU ;

3.2) scrivere la matrice di iterazione B_J del metodo di Jacobi e trovare una maggiorazione del raggio spettrale $\rho(B_J)$ utilizzando il primo teorema di Gershgorin;

3.3) data la matrice $C = A + \alpha I$, I matrice identità, $\alpha \in \mathbb{R}$, trovare per quali valori del parametro α la matrice C è diagonalmente dominante, e per quali valori di α è soddisfatta la condizione $\|C\|_1 \geq 30$.

4) Data la formula di quadratura per l'approssimazione di $\int_{-1}^1 f(x) dx$

$$\tilde{I}(f) = Af(-1) + Bf(1) + Cf'(1), \quad A, B, C \in \mathbb{R},$$

trovare i valori dei parametri A, B, C affinché $\tilde{I}(f)$ abbia grado di precisione massimo.

Quanto vale tale grado di precisione?

5) Stimare il numero minimo di sottointervalli di uguale ampiezza in cui si deve suddividere l'intervallo $[0, 2\pi]$, affinché l'errore che si commette interpolando con una spline lineare la funzione

$$f(x) = \sin^2 x, \quad x \in [0, 2\pi],$$

sia minore di 10^{-2} .

Scrivere l'espressione della spline lineare $s_1(x)$ che interpola f in 5 nodi equispaziati sull'intervallo $[0, 2\pi]$ e disegnarne il grafico.

6) (Solo per gli studenti del corso avanzato).

Dato il metodo iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)})$, per l'approssimazione della soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, si discuta la scelta del parametro α_k nel caso dinamico.