CALCOLO NUMERICO (14 luglio 2011)

1) Data la funzione $f(x) \equiv x^5 - kx,\ k \in \mathbb{R}$

1.1) Stabilire, al variare di k, il numero delle radici reali di f.

1.2) Dato il metodo iterativo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{M},\ M \in \mathbb{R},$$

determinare il parametro M in modo che il metodo risulti del secondo ordine per l'approssimazione della radice positiva di f.

1.3) Si studi graficamente la convergenza del metodo iterativo

$$x_{n+1} = \frac{x_n^5}{k},\ k > 0,$$

e se ne discuta l'ordine.

2) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{g}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{g} \in \mathbb{R}^4,$$

dimostrare che il metodo iterativo

$$(*) \qquad \mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad k \geq 0,$$

converge alla soluzione del sistema lineare, dove $B = I - A$ è la matrice di iterazione associata al metodo iterativo e $\mathbf{x}^{(0)}$ è un generico vettore di $\mathbb{R}^4$. Confrontare la velocità di convergenza del metodo $(*)$ con quella del metodo di Gauss-Seidel.

3) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2} + \frac{\sqrt{x-1}}{2}$$

e stabilire per quali $x \in (1, \infty)$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 5$.

4) Indicare per quali valori di $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste uno ed unico polinomio di terzo grado p_3 tale che

$$p_3(0) = y_0\ , \quad p_3'(x_0) = y_1\ , \quad p_3''(x_0) = y_2\ , \quad p_3'(1) = y_3$$

per ogni insieme di dati y_0, y_1, y_2, y_3.

5) Descrivere il metodo delle potenze.