CALCOLO NUMERICO 1 (12 luglio 2012)

1) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con A matrice 2×2 di elementi

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}, \quad a \neq 0, 1 :$$

stabilire per quali valori di a: 1.1) la matrice A è non singolare; 1.2) la matrice A è diagonalmente dominante; 1.3) il metodo di Jacobi è convergente; 1.4) il metodo di Gauss-Seidel è convergente;

Inoltre, posto $a = 4$, si disegnino i cerchi di Gershgorin e si deduca la natura degli autovalori ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), motivando la risposta.

2) Assegnati i nodi $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$ e i valori $y_k = (-1)^k$, $k = 0, ..., n$:

2.1) nel caso $n = 2$ costruire il polinomio di interpolazione con il metodo di Lagrange;

2.2) nel caso $n = 4$ costruire la retta dei minimi quadrati e generalizzare il risultato al caso di un numero n pari maggiore di 4.

3) Data la formula di quadratura numerica

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \omega_1 f(-1) + \omega_2 f(-\alpha) + \omega_2 f(\alpha) + \omega_1 f(1), \quad 0 < \alpha < 1$$

3.1) trovare ω_1 e ω_2 in funzione di α in modo tale che la formula abbia grado di precisione 3.

3.2) Esistono valori di ω_1, ω_2, α per i quali il grado di precisione sia maggiore di 3?

4) Dato il metodo di punto fisso $x_{n+1} = g(x_n)$, con

$$g(x) = x(1 + \beta x^2) + \gamma e^{x-1} - (\beta + \gamma),$$

verificare che $\alpha = 1$ è un punto fisso per g per ogni coppia di valori β e γ.

3.1) Quale relazione deve sussistere fra β e γ affinchè il metodo sia almeno di ordine 2?

3.2) Per quali valori di β e γ il metodo è almeno di ordine 3?

3.3) Esistono valori di β e γ per i quali il metodo ha ordine 4?

NON E' RICHIESTO LO STUDIO GRAFICO

5) Si considerino due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e tali che esista una matrice invertibile C per cui $A = CBC^{-1}$. Dimostrare o confutare la seguente affermazione: " A è convergente se e solo se B è convergente".