Cognome: ____________ Nome: ____________ Matricola: ________

Laboratorio di Calcolo Numerico - Corso di Laurea in Matematica
Appello d'esame del 12/07/2012

ESERCIZIO 1 [10 punti]

Si consideri il problema di approssimare le radici $\alpha_1 = -2$ e $\alpha_2 = 1$ del polinomio $p(x) = x^3 - 3x + 2$.

1. Si applichi il metodo di Newton, partendo dal valore iniziale $x_0 = -2.4$ con `toll=1e-5`. A quale radice si converge? Detta α tale radice, si determini sperimentalmente il valore intero positivo p_1 per il quale il rapporto $|x_{k+1} - \alpha|/|x_k - \alpha|^{p_1}$ è (circa) costante.
2. Si consideri ora il valore iniziale $x_0 = 1.2$ con `toll=1e-5` e si applichi nuovamente il metodo di Newton. A quale radice si converge in questo caso? Detta α tale radice, si determini sperimentalmente il valore intero positivo p_2 per il quale il rapporto $|x_{k+1} - \alpha|/|x_k - \alpha|^{p_2}$ è (circa) costante.
3. Si commentino i risultati trovati ai punti precedenti e si dica come è possibile migliorare la convergenza del metodo nel caso in cui essa non sia ottimale.

- radice approssimata = $p_1 =$
- radice approssimata = $p_2 =$
- commento risultati

ESERCIZIO 2 [10 punti]

Si consideri la funzione $f(x) = e^x$ nell'intervallo $[0, 1]$.

1. Si calcoli con Matlab il polinomio di interpolazione di Lagrange di grado 2, $\Pi_2 f(x)$, sull'intervallo considerato. Si stimi teoricamente l'errore di interpolazione nel punto $x = 3/4$ e lo si confronti con l'errore effettivamente commesso.

2. Sia
$$Z = \int_0^1 f(x)\, dx$$
Si dica a quale metodo di quadratura corrisponde l'approssimazione
$$Z_h = \int_0^1 \Pi_2 f(x)\, dx$$
Si stimi teoricamente l'errore commesso usando tale formula e si calcoli inoltre l'errore effettivamente commesso implementando il metodo proposto in Matlab (è un'istruzione di una riga!).

3. Quale errore si ottiene usando invece il comando `quad` nella sua forma di default? Quale metodo utilizza tale comando?

- errore di interpolazione in $x = 3/4$ sperimentale =   teorico=

- quadratura corrispondente =

  errore sperimentale =   teorico=

- errore ottenuto con `quad`   metodo utilizzato

ESERCIZIO 3 [10 punti]

Si consideri il sistema lineare (parametrico nel valore reale ϵ) $A_\epsilon x = b_\epsilon$, dove

$$A_\epsilon = \begin{bmatrix} (-2+\epsilon) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (-2+\epsilon) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (-2+\epsilon) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (-2+\epsilon) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (-2+\epsilon) \end{bmatrix}$$

e il termine noto è scelto in modo che la soluzione esatta sia il vettore tutto composto da valori 1.

1. Si costruisca la famiglia di matrici e il termine noto corrispondente per $\epsilon = [-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0.5]$ e si riportino i comandi Matlab utilizzati
2. Si disegni il grafico del raggio spettrale della matrice di iterazione in funzione di ϵ per il metodo di Gauss-Seidel applicato all'approssimazione del sistema. Si dica per quali valori di ϵ il metodo converge.

3. Sia ϵ^* il valore di ϵ che garantisce massima velocità di convergenza e siano `toll=1e-6`, `xv=zeros(5,1)`. Quale è l'errore relativo commesso in norma 2 con tali dati nell'approssimazione del sistema $A_{\epsilon^*}x = b_{\epsilon^*}$?

- comandi Matlab

- intervallo di convergenza

- $\epsilon^* =$ errore relativo in norma 2 =

Appello 12/07/2012 - Soluzione

Esercizio 1.

1. Definiamo il polinomio come inline function e tracciamone un grafico

```
>> fun=inline('x.^3- 3*x + 2','x');
>> x=linspace(-3,2); plot(x,fun(x)), grid
```

   Usiamo ora il metodo di Newton con $x_0 = -2.4$

```
>> dfun=inline('3*x.^2- 3','x');
>> [x,iter]=newton(fun,dfun,-2.4,1e-5,300);
>> x(end)

ans =

   -2.0000
>> a1=-2; abs(x(2:end)-a1)./abs(x(1:end-1)-a1).^2
ans =

    0.4762    0.6195    0.6643    0.6667
```

   Il metodo converge alla radice $x = -2$ con $p_1 = 2$ (quadraticamente).

2. Consideriamo ora $x_0 = 1.2$

```
>> [x,iter]=newton(fun,dfun,1.2,1e-5,300);
>> x(end)

ans =

    1.0000

>> a2=1; abs(x(2:end)-a2)./abs(x(1:end-1)-a2)

ans =

    0.5152    0.5082    0.5043    0.5022    0.5011    0.5006    0.5003    0.5001
```

   Il metodo converge alla radice $x = 1$ con $p_2 = 1$ (linearmente).

3. Il polinomio proposto ha una radice semplice in -2 e una radice doppia in 1, come evidente anche dalla rappresentazione grafica. Nel primo caso il metodo di Newton converge in modo ottimale con ordine 2, nel secondo invece converge solo linearmente. In quest'ultima situazione è possibile recuperare l'ordine ottimale modificando il metodo di Newton con la seguente iterazione

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{p(x_k)}{p'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, \dots,$$

   dove $m = 2$ è la molteplicità della radice in questione.

Esercizio 2.

1. Calcoliamo l'interpolante di grado 2 nei tre nodi equispaziati $0, 1./2, 1$ e calcoliamo errore sperimentale e errore stimato teoricamente in $x = 3/4$

```
>> fun=inline('exp(x)','x');
>> xv=[0 1/2 1];
>> p=polyfit(xv,fun(xv),2);
>> xx=3/4;
>> esp=abs(fun(xx)-polyval(p,xx))

esp =

    0.0139
```

Per quanto riguarda l'errore teorico, abbiamo che, posti $a = x_0, b = x_2$, se $f \in C^{'''}[a, b]$, esiste un punto $\xi = \xi(x) \in (a, b)$ tale che

$$|e_{th}(x)| = |f(x) - \Pi_2 f(x)| = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{f^{(''')}(\xi)}{3!}.$$

Posto inoltre $M_3 = \max_{x\in(a,b)} f^{(''')}(x)$, abbiamo

$$|e_{th}(x)| = |f(x) - \Pi_2 f(x)| \leq (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{M_3}{3!}.$$

e in particolare per $x = 3/4$ otteniamo la stima teorica

```
>> eth=abs(fun(1)/6*(xx-xv(1))*(xx-xv(2))*(xx-xv(3)))

eth =

    0.0212
```

2. Il valore Z_h corrisponde all'integrale approssimato con il metodo di Simpson semplice. In Matlab calcoliamo

```
>> IS=1/6*(fun(xv(1))+4*fun(xv(2))+fun(xv(3)))
IS =

    1.7189
I=exp(1)-exp(0)

I =

    1.7183
abs(IS-I)

ans =

  5.7932e-004
```

Ricordiamo ora la stima teorica dell'errore nel caso della quadratura di Simpson semplice

$$e_S = \frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(IV)}(\xi), \qquad \xi \in (a,b)$$

e calcoliamo in Matlab la maggiorazione

```
eS=1/90*(1/2)^5*exp(1)

eS =

  9.4385e-004
```

3. il comando `quad` implementa la formula di quadratura di Simpson scegliendo adattattivamente il numero di intervalli di quadratura per ottenere, nel suo uso di default, un errore inferiore a 10^{-6}

```
eSq=quad(fun,0,1)
abs(I-eSq)

ans =

 3.7426e-009
```

Esercizio 3.

1. Costruiamo la matrice parametrizzata in ϵ e calcoliamo il raggio spettrale, rappresentandolo poi in un grafico in funzione di ϵ stesso

   ```
   >> epsilon=[-1:0.1:0.5];
   >> for i=1:numel(epsilon),
   ee=epsilon(i);
   v1=(-2+ee)*ones(5,1);
   v2=ones(4,1);
   A=diag(v1)+diag(v2,-1)+diag(v2,1);
   D=diag(diag(A));
   E=-tril(A,-1);
   F=-triu(A,1);
   BGS=inv(D-E)*F;
   rho(i)=max(abs(eig(BGS)));
   end
   >> plot(epsilon,rho,epsilon,ones(size(epsilon))),grid
   ```

   Il metodo di Gass-Seidel converge per $\epsilon \in [-1, 0.26]$ (circa). La convergenza più rapida si ottiene quando il raggio spettrale e minore, nel nostro caso per $\epsilon = -1$ (si osservi che in tale caso la matrice ha elemento diagonale massimo, in modulo).

2. Risolviamo ora il sistema lineare con $\epsilon = -1$ e calcoliamo l'errore relativo commesso in norma 2

   ```
   >> ee=-1;
   >> v1=(-2+ee)*ones(5,1);
   >> v2=ones(4,1);
   >> A=diag(v1)+diag(v2,-1)+diag(v2,1);
   >> b=A*ones(5,1);
   >> [x,iter]=gseidel(A,b,zeros(5,1),300,1e-6);
   >> norm(x-ones(5,1),2)/norm(ones(5,1),2)

   ans =

     1.5816e-007
   ```