CALCOLO NUMERICO 1 (11 luglio 2013)

1) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

e stabilire per quali x il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 10$.

2) Studiare la convergenza e l' ordine del metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ per la ricerca dei punti fissi della funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1 + (x-1)^4 & x < 2 \\ \\ 2 + (x-2)^2 & x \geq 2 \end{cases}$$

al variare di $x_0 \geq 0$.

3) Data $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ sia $p_{2n}(x)$ il polinomio di grado $2n$ che interpola f nei nodi $x_i = -1 + i/n,\ i = 0, ..., 2n$. Dimostrare che $\forall x \in [-1, 1]$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} [f(x) - p_{2n}(x)] = 0.$$

4) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 4 & 4 \\ 4 & \alpha & 4 \\ 4 & 4 & \alpha \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

4.1) Determinare per quali valori di α la matrice A è definita positiva.

4.2) Determinare per quali valori di α la matrice A è diagonalmente dominante.

4.3) Determinare per quali valori di α il metodo di Jacobi converge.

4.4) Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ il metodo di Gauss-Seidel converge.

5) Dimostrare che una formula di quadratura è esatta per tutti i polinomi $p_n \in \mathbb{P}_n$ se e solo se esatta $\forall\ x^k,\ k \leq n$.