CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 11 Luglio 2013

1) Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2002 & 2002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2002 & 2002 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2002 & 2002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2002 & 2002 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2002 & 2002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2002 & 2002 \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 4004 \\ 4005 \\ 4005 \\ 4005 \\ 4005 \\ 4004 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare il numero di condizionamento $K_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2$, e confrontarlo al variare di $\varepsilon = 10^{-1},\ 10^{-2},\ 10^{-3}$ con $K_\varepsilon(A) = (\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_\varepsilon\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2})/(\frac{\|A-A_\varepsilon\|_2}{\|A\|_2})$, essendo $\mathbf{x}_\varepsilon$ la soluzione del sistema perturbato $A_\varepsilon\mathbf{x}_\varepsilon = \mathbf{f}$, dove $(A_\varepsilon)_{32} = (A_\varepsilon)_{23} = (A_\varepsilon)_{54} = (A_\varepsilon)_{45} = 1+\varepsilon,\ A_\varepsilon = A$ altrove.

Risultati: $K_2(A) =$

	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$
$K_\varepsilon(A)$			

2) Sia p_4 il polinomio di grado 4 che interpola $p_6(x) = 2x^6 + 4x^4 + 4x^2 + 4$ in 5 nodi equispaziati dell'intervallo $[-1, 1]$ e siano $p_3 = p_4'$ e $p_5 = p_6'$. Per trovare p_4 si utilizzi il comando MATLAB `polyfit`. Calcolare gli errori $err_1 = \frac{\|p_6-p_4\|_\infty}{\|p_6\|_\infty}$, $err_2 = \frac{\|p_5-p_3\|_\infty}{\|p_5\|_\infty}$, dove $\|f\|_\infty = \max_{0\le j\le 200}|f(z_j)|$, e $z_j = -1 + \frac{1}{100}j,\ j = 0, ..., 200$.

Risultati: $err_1 =$ $err_2 =$

3) Si consideri il metodo iterativo $x_{n+1} = g_p(x_n),\ n \geq 0,\ g_p(x) = x(2-px)$, per l'approssimazione di $\alpha = \frac{1}{p}$ punto fisso di g_p, con $p = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ e $x_0 = \frac{3}{2p}$.

Sia N il numero di iterazioni per cui si ha $|x_n - \alpha| \approx \underbrace{\frac{|x_n - x_{n+1}|}{|1 - g_p'(x_n)|}}_{e_n} < 10^{-8}$.

Si verifichi sperimentalmente che $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2}}_{r_n} = \frac{1}{2}g_p''(\alpha)$ calcolando i valori richiesti nella tabella.

p	N	x_N	e_N	r_N	$\frac{1}{2}g_p''(\alpha)$
$\frac{1}{4}$					
$\frac{1}{2}$					
$\frac{3}{4}$					