1) Dato il sistema $A\mathrm{x} = \mathbf{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

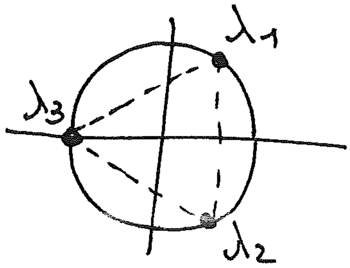
1.1) determinare per quali valori di α i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono, e stabilire la relazione tra le velocità asintotiche di convergenza dei due metodi;

1.2) per i valori di α per i quali i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono, calcolare la fattorizzazione $A = LU$ e la quantità $\|U\|_\infty$.

M1 9/7/15

Metodo di Jacobi

$$\left|\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ \alpha & \lambda & 0 \\ 0 & \alpha & \lambda \end{pmatrix}\right| = \lambda(\lambda^2) - \alpha(-\alpha^2) = \lambda^3 + \alpha^3 = 0$$



$\lambda_{1,2} = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\alpha \quad \lambda_3 = -1 \cdot \alpha \quad |\lambda| = |\alpha|$

$\rho(B_J) = |\alpha| < 1 \quad$ per $|\alpha| < 1$

Metodo di Gauss-Seidel

$$\left|\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ \alpha\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & \alpha\lambda & \lambda \end{pmatrix}\right| = \lambda \cdot \lambda^2 - \alpha\lambda(-\alpha^2\lambda) =$$

$$\lambda^3 + \alpha^3\lambda^2 = 0 \quad \lambda^2(\lambda + \alpha^3) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0 \quad \lambda = -\alpha^3$$

$\rho(B_{GS}) = |\alpha^3| < 1 \quad |\alpha| < 1$

$R(B_{GS}) = -\ln|\alpha|^3 = 3R(B_J)$ | GS Velocità tripla di J

1.2) $|\alpha| < 1 \Rightarrow$ No Pivoting

$m_{21} = \alpha \qquad m_{31} = 0 \qquad a_{23} = -\alpha^2$

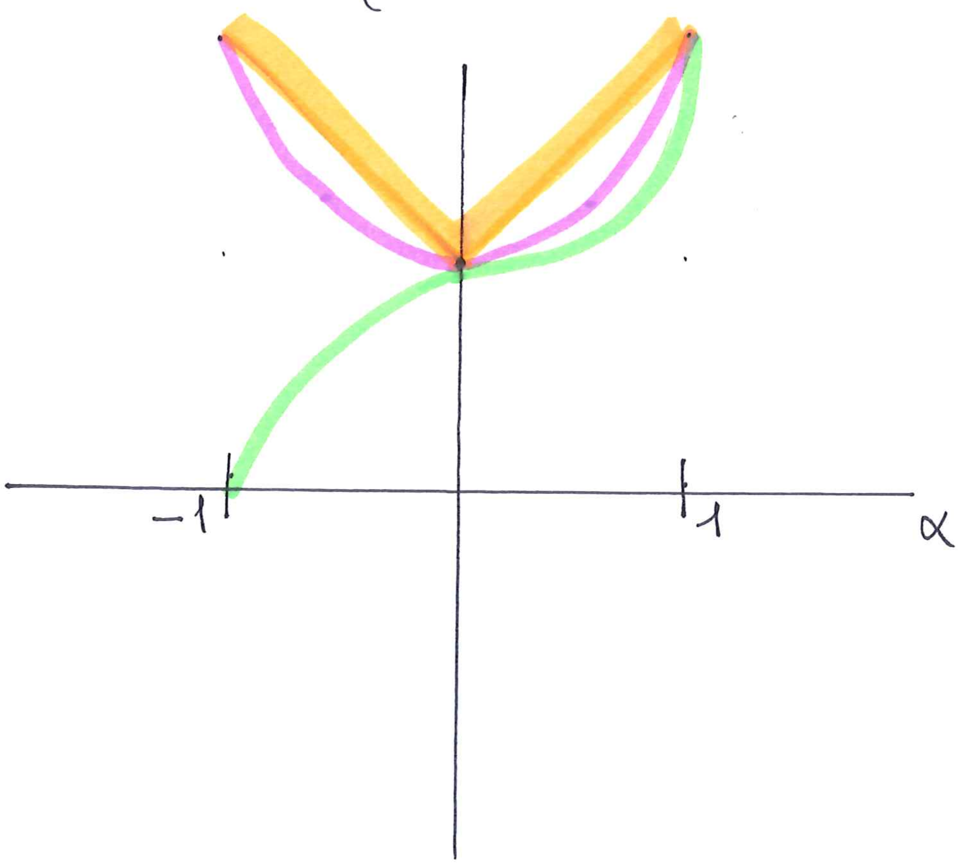
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -\alpha^2 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$m_{32} = \alpha \qquad a_{33} = 1 + \alpha^3$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & 1+\alpha^3 \end{bmatrix}$$

$$\|U\|_\infty = \max\left\{ 1+|\alpha| ;\ 1+\alpha^2 ;\ |1+\alpha^3| \right\} = 1 + |\alpha|$$

per $|\alpha| < 1$



M1 9/7/15

2) Si determino i pesi w_0, w_1, w_2 in modo tale che la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} |x| f(x) dx \approx w_0 f(-1) + w_1 f(0) + w_2 f(1),$$

abbia grado di precisione massimo (rispetto alla funzione f). La formula ottenuta è di tipo Gaussiano?

$r=0 \quad f(x)=1$

$$\int_{-1}^{1} |x| \, dx = 1 \qquad w_0 + w_1 + w_2 = 1$$

$w_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$r=1 \quad f(x)=x$

$$\int_{-1}^{1} |x| \cdot x \, dx = 0 \qquad -w_0 + w_2 = 0 \qquad \Rightarrow w_0 = w_2$$

$r=2 \quad f(x)=x^2$

$$\int_{-1}^{1} |x| x^2 \, dx = 2\int_{0}^{1} x^3 dx = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \qquad w_0 + w_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow w_0 = w_2 = \frac{1}{4}$$

$$I(f) = \frac{1}{4} f(-1) + \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{4} f(1)$$

La formula non è Gaussiana
(i nodi $-1, 0, 1$ sono fissati e non determinati in modo che il grado di precisione sia massimo)

3) Si consideri il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, 2, ...$, con x_0 assegnato e $g(x) = 2^{-x}$. Si dimostri che esiste un unico punto fisso α di g nell'intervallo $[1/3, 1]$. La successione $\{x_k\}$ converge ad α per ogni $x_0 \in [1/3, 1]$? Applicare il metodo per calcolare x_2 a partire da $x_0 = 1$ e dare una stima dell'errore commesso.

MI 9/7/15

$$g(x) = 2^{-x}$$

$$x = 2^{-x} \qquad x - 2^{-x} = 0$$

$$f(x) = x - 2^{-x}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} < 0$$

$$f(1) = 1 - 2^{-1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

$$f'(x) = 1 + 2^{-x} \ln 2 > 0 \quad \forall x$$

f monotone crescente $\Rightarrow \exists!\ \alpha$ t.c. $f(\alpha) = 0$
$(g(\alpha) = \alpha)$

Considero la condizione sufficiente $|g'(x)| < 1$

$$g'(x) = -2^{-x} \ln 2 \qquad g''(x) = 2^{-x} (\ln 2)^2 > 0 \quad g' \text{: crescente}$$

$$\left|g'\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|-2^{-\frac{1}{3}} \ln 2\right| = \left|-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \ln 2\right| < 1$$

$$|g'(1)| = |-2^{-1} \ln 2| < 1$$

$$-1 < g'\left(\frac{1}{3}\right) < g'(1) < 0$$

$\hookrightarrow$ C.S. convergenza

$x_0 = 1$

$x_1 = 2^{-x_0} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$x_2 = 2^{-x_1} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071067811865$

Stima errore

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{1 - g'(x_n)} \approx |x_n - \alpha|$$

Trovo $x_3 = 2^{-x_2} \stackrel{=}{\approx} \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}\right) \approx 0.6125473265\ldots$

$g'(x_2) = -2^{-x_2} \ln 2 \approx -0.424585452\ldots$

$|x_2 - \alpha| \approx \frac{0.09455945465}{1.424585452\ldots} \approx 0.0663768\ldots$

4) Data la funzione $s : [-1, 2] \to \mathbb{R}$,

MI 9/7/15

$$s(x) = \begin{cases} ax + bx^2 + cx^3 & x \in [0,1) \\ d(x-1)^2 + e(x-1)^3 & x \in [1,2) \\ f(x-2) + g(x-2)^2 + h(x-2)^3 & x \in [2,3] \end{cases}$$

si determini per quali parametri a, b, c, d, e, f, g, h essa risulta una spline cubica.
Esistono valori dei parametri per cui essa è una spline cubica naturale ?

$$s'(x) = \begin{cases} a + 2bx + 3cx^2 \\ 2d(x-1) + 3e(x-1)^2 \\ f + 2g(x-2) + 3h(x-2)^2 \end{cases} \qquad s''(x) = \begin{cases} 2b + 6cx \\ 2d + 6e(x-1) \\ 2g + 6h(x-2) \end{cases}$$

- $s(1^-) = a + b + c \qquad s(1^+) = 0$

  $s(2^-) = d + e \qquad s(2^+) = 0$

- $s'(1^-) = a + 2b + 3c \qquad s'(1^+) = 0$

  $s'(2^-) = 2d + 3e \qquad s'(2^+) = f$

- $s''(1^-) = 2b + 6c \qquad s''(1^+) = 2d$

  $s''(2^-) = 2d + 6e \qquad s''(2^+) = 2g$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ d+e=0 \\ a+2b+3c=0 \\ 2d+3e=f \\ 2b+6c=2d \\ 2d+6e=2g \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b+c=0 \\ d+e=0 \\ a+2b+3c=0 \\ 2d+3e=f \\ b+3c=d \\ d+3e=g \end{cases} \qquad \begin{cases} d=-e \\ f=e \\ g=2e \end{cases} \qquad \begin{matrix} a+b+c=0 \\ a+2b+3c=0 \\ b+3c=-e \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a=-b-c & & a=c \\ & & \Uparrow \\ -b-c+2b+3c=0 & \Rightarrow & b=-2c \\ -2c+3c=-e & \Rightarrow & c=-e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-e \\ b=2e \\ c=-e \\ d=-e \\ f=e \\ g=2e \end{cases}$$

$\forall h$

Spline cubica naturale

$s''(0) = 0$

$b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b = c = d = e = f = g = 0$

$s''(3) = 0$

$h = 0$

$\Rightarrow \quad s(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 3]$

M1

9/7/15

5) Discutere l'esistenza e l'unicità del polinomio nella forma

$$p(x) = c_1 + c_2x^2 + c_3x^4$$

con coefficienti reali c_1, c_2, c_3 ed interpolante i valori y_1, y_2, y_3 nei nodi distinti x_1, x_2, x_3.

Condizioni di interpolazione

$$c_1 + c_2 x_1^2 + c_3 x_1^4 = y_1$$
$$c_1 + c_2 x_2^2 + c_3 x_2^4 = y_2$$
$$c_1 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^4 = y_3$$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^4 \\ 1 & x_2^2 & x_2^4 \\ 1 & x_3^2 & x_3^4 \end{vmatrix} = \dots\dots = (x_3^2 - x_1^2)(x_2^2 - x_1^2)(x_3^2 - x_2^2) \neq 0$$

↳ vedi matrice di Vandermonde

$x_1^2 = t_1 \quad x_2^2 = t_2 \quad x_3^2 = t_3$

$x_1 \neq \pm x_3 \quad x_2 \neq \pm x_3 \quad x_1 \neq \pm x_2$

$\Rightarrow$ Esistenza e unicità.