

CALCOLO NUMERICO 1 (9 Luglio 2015)
GIUSTIFICARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE

1) Dato il sistema $Ax = b$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

- 1.1) determinare per quali valori di α i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono, e stabilire la relazione tra le velocità asintotiche di convergenza dei due metodi;
- 1.2) per i valori di α per i quali i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono, calcolare la fattorizzazione $A = LU$ e la quantità $\|U\|_\infty$.

2) Si determinino i pesi w_0, w_1, w_2 in modo tale che la formula di quadratura

$$\int_{-1}^1 |x|f(x)dx \approx w_0f(-1) + w_1f(0) + w_2f(1),$$

abbia grado di precisione massimo (rispetto alla funzione f). La formula ottenuta è di tipo Gaussiano?

3) Si consideri il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, con x_0 assegnato e $g(x) = 2^{-x}$. Si dimostri che esiste un unico punto fisso α di g nell'intervallo $[1/3, 1]$. La successione $\{x_k\}$ converge ad α per ogni $x_0 \in [1/3, 1]$? Applicare il metodo assegnato per calcolare x_2 a partire da $x_0 = 1$ e dare una stima dell'errore commesso.

4) Data la funzione $s : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$s(x) = \begin{cases} ax + bx^2 + cx^3 & x \in [0, 1) \\ d(x-1)^2 + e(x-1)^3 & x \in [1, 2) \\ f(x-2) + g(x-2)^2 + h(x-2)^3 & x \in [2, 3] \end{cases}$$

si determini per quali parametri a, b, c, d, e, f, g, h essa risulta una spline cubica.

Esistono valori dei parametri per cui essa è una spline cubica naturale?

5) Discutere l'esistenza e l'unicità del polinomio nella forma

$$p(x) = c_1 + c_2x^2 + c_3x^4$$

con coefficienti reali c_1, c_2, c_3 ed interpolante i valori y_1, y_2, y_3 nei nodi distinti x_1, x_2, x_3 .