CALCOLO NUMERICO 1 (7 luglio 2016) - Prova scritta

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

1) Indicare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste uno ed unico polinomio di terzo grado p_3 tale che

$$p_3(0) = y_0, \quad p_3(1) = y_1, \quad p_3'(1) = y_2, \quad p_3'(\alpha) = y_3,$$

per ogni insieme di dati y_0, y_1, y_2, y_3.

$$p_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$p_3'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$p_3(0) = d = y_0$$

$$p_3(1) = a + b + c + d = y_1$$

$$p_3'(1) = 3a + 2b + c = y_2$$

$$p_3'(\alpha) = 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c = y_3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3\alpha^2 & 2\alpha & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$(2-2\alpha) - (3-3\alpha^2) + 6\alpha - 6\alpha^2 \neq 0$$

$$2(1-\alpha) - 3(1+\alpha)(1-\alpha) + 6\alpha(1-\alpha) \neq 0$$

$$(1-\alpha)(2-3-3\alpha+6\alpha) \neq 0$$

$$(1-\alpha)(3\alpha-1) \neq 0 \qquad \alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq \frac{1}{3}$$

2) Data la funzione $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 4$, studiare al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ la convergenza e l' ordine del metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ per l'approssimazione dei punti fissi di g.

MILANO C.N. 1 7/7/16

$x = g(x)$

$x = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 4$

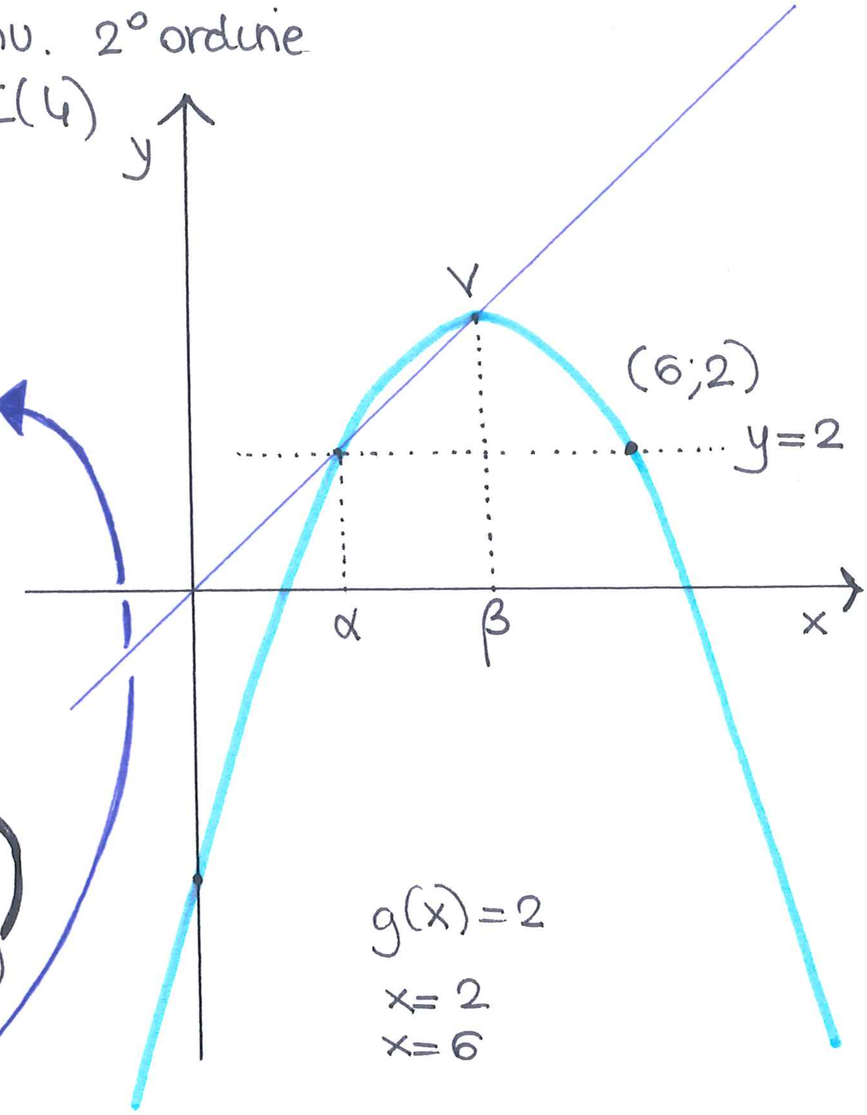
$V(4;4)$ $g'(x) = -x + 4$

$x^2 - 6x + 8 = 0$ $\alpha = 2$ $\beta = 4$ $g''(x) = -1$

$\underbrace{g'(2) = 2 > 1}_{\text{non conv.}}$ $g'(4) = 0$ $g''(4) = -1$

non conv.
$I(2)$

conv. 2° ordine
$I(4)$



$x_0 < \alpha = 2$
Successione monotona decrescente, illim. inf.
$x_n \searrow -\infty$

$\alpha < x_0 < \beta$
Successione monotona crescente, lim. sup. da β: $x_n \nearrow \beta$.

$4 < x_0 < 6$ $x_1 \in (2,4)$
$x_n \to \beta$

$g(x) = 2$
$x = 2$
$x = 6$

$x_0 > 6$ $x_1 < 2$

$x_0 = 2$ "$x_n = 2$" $\forall n$

$x_0 = 4$ "$x_n = 4$" $\forall n$

3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a^2 \\ 1 & 2 & 0 \\ a^2 & 0 & a \end{pmatrix},$$

determinare tutti e soli i valori di a per i quali:

3.1) A è diagonalmente dominante (in senso stretto)

3.2) Il metodo di Jacobi è ben definito e converge.

3.3) Il metodo di Gauss-Seidel è ben definito e converge.

Se $a = 1$, $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, stimare il numero di iterazioni necessarie del metodo di Gauss-Seidel affinchè si abbia

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le 10^{-6}.$$

3.1) $\begin{cases} 2 > 1 + a^2 \\ 2 > 1 \\ |a| > a^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a^2 < 1 \\ \\ |a| < 1 \wedge a \neq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow |a| < 1 \wedge a \neq 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \det A \neq 0 \\ a^2(2a^2) + a(3) \neq 0 \quad a(2a^3+3) \neq 0 \\ a \neq 0 \wedge a \neq -\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \end{array}}$$

3.2) $a \neq 0$ $(a_{ii} \neq 0)$

$$\det\begin{bmatrix} 2\lambda & 1 & -a^2 \\ 1 & 2\lambda & 0 \\ a^2 & 0 & a\lambda \end{bmatrix} = a^2\left(+2a^2\lambda\right) + a\lambda\left(4\lambda^2 - 1\right) =$$

$$2a^4\lambda + 4a\lambda^3 - a\lambda = a\lambda\left(4\lambda^2 + 2a^3 - 1\right) = 0$$

$\lambda = 0 \qquad 4\lambda^3 = 1 - 2a^3 \qquad \lambda^2 = \frac{1-2a^3}{4}$

$\left|\frac{1-2a^3}{4}\right| < 1$ $\quad \begin{cases} \frac{1-2a^3}{4} < 1 \\ \frac{1-2a^3}{4} > -1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2a^3 + 3 > 0 & a > -\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \\ 2a^3 - 5 < 0 & a < \sqrt[3]{\frac{5}{2}} \end{cases}$

$\Uparrow$

CNS per convergenza

$$-\sqrt[3]{\frac{3}{2}} < a < \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$$

3.3)

$$\det\begin{bmatrix} 2\lambda & 1 & -a^2 \\ \lambda & 2\lambda & 0 \\ a^2\lambda & 0 & a\lambda \end{bmatrix} = a^2\lambda\left(2a^2\lambda\right) + a\lambda\left(4\lambda^2 - \lambda\right) =$$

$$2a^4\lambda^2 + 4a\lambda^3 - a\lambda^2 =$$

$$a\lambda^2\left(2a^3 + 4\lambda - 1\right) = 0$$

$\lambda = 0$

$\lambda = \dfrac{1-2a^3}{4}$

CNS per convergenza $\left|\dfrac{1-2a^3}{4}\right| < 1 \Rightarrow$ vedi metodo di Jacobi

$a = 1$ $\quad \lambda(B_{GS}) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1-2}{4} = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

$\rho(B_{GS}) = \dfrac{1}{4} = 0.25$

$R(B_{GS}) = -\ln 0.25$

n° iterazioni $\quad k > \dfrac{-\ln \varepsilon}{-\ln 0.25} = \dfrac{\ln 10^{-6}}{\ln 0.25} \approx 9.9$

$\bar{K} = 10$

4) Data la formula di quadratura

$$\tilde{I}(f) = \alpha f(-1) + \beta f(1) + \gamma f'(-1)$$

MILANO

eN1

7/7/2016

per il calcolo approssimato di

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x,$$

con $f \in C^1([-1,1])$, determinare i coefficienti α, β e γ in modo tale che $\tilde{I}(f)$ abbia grado di precisione 2. Determinare il grado di precisione della formula ottenuta.

Grado di precisione $r=0$: $f=1 \quad f'=0$

$\tilde{I}(f) = \alpha+\beta$

$I(f) = 2$

$\alpha+\beta=2$

$r=1 \quad f=x \quad f'=1$

$\tilde{I}(f) = -\alpha+\beta+\gamma$

$I(f)=0$

$-\alpha+\beta+\gamma=0$

$r=2 \quad f=x^2 \quad f'=2x$

$\tilde{I}(f) = \alpha+\beta-2\gamma$

$I(f) = \frac{2}{3}$

$\alpha+\beta-2\gamma=\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} \alpha = 2-\beta \\ -2+\beta+\beta+\gamma=0 \\ 2-\cancel{\beta}+\cancel{\beta}-2\gamma=\frac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha=\frac{4}{3} \\ \beta=\frac{2}{3} \\ \gamma=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$\tilde{I}(f) = \frac{4}{3}f(-1)+\frac{2}{3}f(1)+\frac{2}{3}f'(-1)$

$r=3 \quad f=x^3 \quad f'=3x^2$

$\tilde{I}(f) = \frac{4}{3}(-1)+\frac{2}{3}\cdot(1)+\frac{2}{3}\cdot 3 = -\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+2 = \frac{4}{3}$

$I(f) = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$

$\tilde{I}(x^3) \neq I(x^3)$

G.P. è 2

5) Sia $f : [-2, 4] \to \mathbb{R}$ definita come segue,

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2) + b(x-1)^3, & \text{per } -2 \le x < 1 \\ c(x-2)^2, & \text{per } 1 \le x < 3 \\ d(x-3) + e(x-2)^2, & \text{per } 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

MILANO

CN1

7/7/16

Esistono valori dei parametri reali a, b, c, d, e per cui f è una spline cubica?

$$f'(x) = \begin{cases} a + 3b(x-1)^2 \\ 2c(x-2) \\ d + 2e(x-2) \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} 6b(x-1) \\ 2c \\ 2e \end{cases}$$

$f(1^-) = -a$

$f(1^+) = c$ $\qquad -a = c$

$f(3^-) = c$

$f(3^+) = e$ $\qquad c = e$ $\qquad a = c = e = 0$

$f'(1^-) = a$

$f'(1^+) = -2c$ $\qquad a = -2c$

$f'(3^-) = 2c$

$f'(3^+) = d + 2e$ $\qquad d + 2e = 0$ $\qquad d = 0$

$f''(1^-) = 0$

$f''(1^+) = 2c$ $\qquad c = 0$ (sì)

$f''(3^-) = 2e$

$f''(3^+) = 2e$ $\qquad c = e$

$\Downarrow$

f è una spline cubica per

$a = c = d = e = 0$

$\forall\, b \in \mathbb{R}$