

CALCOLO NUMERICO 1 (7 luglio 2016) - Prova scritta

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

- 1) Indicare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste uno ed unico polinomio di terzo grado p_3 tale che

$$p_3(0) = y_0, \quad p_3(1) = y_1, \quad p_3'(1) = y_2, \quad p_3'(\alpha) = y_3,$$

per ogni insieme di dati y_0, y_1, y_2, y_3 .

- 2) Data la funzione $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 4$, studiare al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ la convergenza e l'ordine del metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ per l'approssimazione dei punti fissi di g .

- 3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a^2 \\ 1 & 2 & 0 \\ a^2 & 0 & a \end{pmatrix},$$

determinare tutti e soli i valori di a per i quali:

3.1) A è diagonalmente dominante (in senso stretto)

3.2) Il metodo di Jacobi è ben definito e converge.

3.3) Il metodo di Gauss-Seidel è ben definito e converge.

Se $a = 1$, $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, stimare il numero di iterazioni necessarie del metodo di Gauss-Seidel affinché si abbia

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq 10^{-6}.$$

- 4) Data la formula di quadratura

$$\tilde{I}(f) = \alpha f(-1) + \beta f(1) + \gamma f'(-1)$$

per il calcolo approssimato di

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx,$$

con $f \in C^1([-1, 1])$, determinare i coefficienti α , β e γ in modo tale che $\tilde{I}(f)$ abbia grado di precisione 2. Determinare il grado di precisione della formula ottenuta.

- 5) Sia $f : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue,

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2) + b(x-1)^3, & \text{per } -2 \leq x < 1 \\ c(x-2)^2, & \text{per } 1 \leq x < 3 \\ d(x-3) + e(x-2)^2, & \text{per } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Esistono valori dei parametri reali a, b, c, d, e per cui f è una spline cubica?