CALCOLO NUMERICO 1 (6 luglio 2017)

MILANO

1) Verificare che $\forall x \neq 0$ la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

è ben condizionata.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$K_f(x) = \left| \frac{x \, \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1} - x} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \quad \forall x$$

N. B. $\left| \frac{\Delta f(x)}{f(x)} \right| \approx K_f(x) \frac{|\Delta x|}{|x|}$ (hp. $x \neq 0$)

2) Applicare il metodo di Newton all'equazione non lineare

$$f(x) \equiv x^3 - 2x^2 + x = 0,$$

e, dopo avere espresso il metodo di Newton nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$, discuterne la convergenza al variare di $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{1}{3}\}$.
Stabilire l'ordine di convergenza del metodo.

Milano

6/7/2017

$x(x^2-2x+1)=0 \qquad \alpha=0 \qquad \beta=1$ molt. 2

$x(x-1)^2$

Metodo di Newton

$$g(x) = x - \frac{x^3-2x^2+x}{(x-1)^2+2x(x-1)} = x - \frac{x(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-1)}(x-1+2x)} =$$

$$x - \frac{x^2-x}{3x-1} = \frac{3x^2-x-x^2+x}{3x-1} = \frac{2x^2}{3x-1} \qquad \text{CE } x \neq \frac{1}{3}$$

$g(0)=0$

$$g(x) = \frac{2x^2}{3x-1}$$

$g(x)>0 \qquad x>\frac{1}{3}$

$x=\frac{1}{3}$ AS. VERTICALE

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{3x^2-x} = \frac{2}{3} \qquad q = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{3x-1} - \frac{2}{3}x =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2-6x^2+2x}{3(3x-1)} = \frac{2}{9} \qquad y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}$$

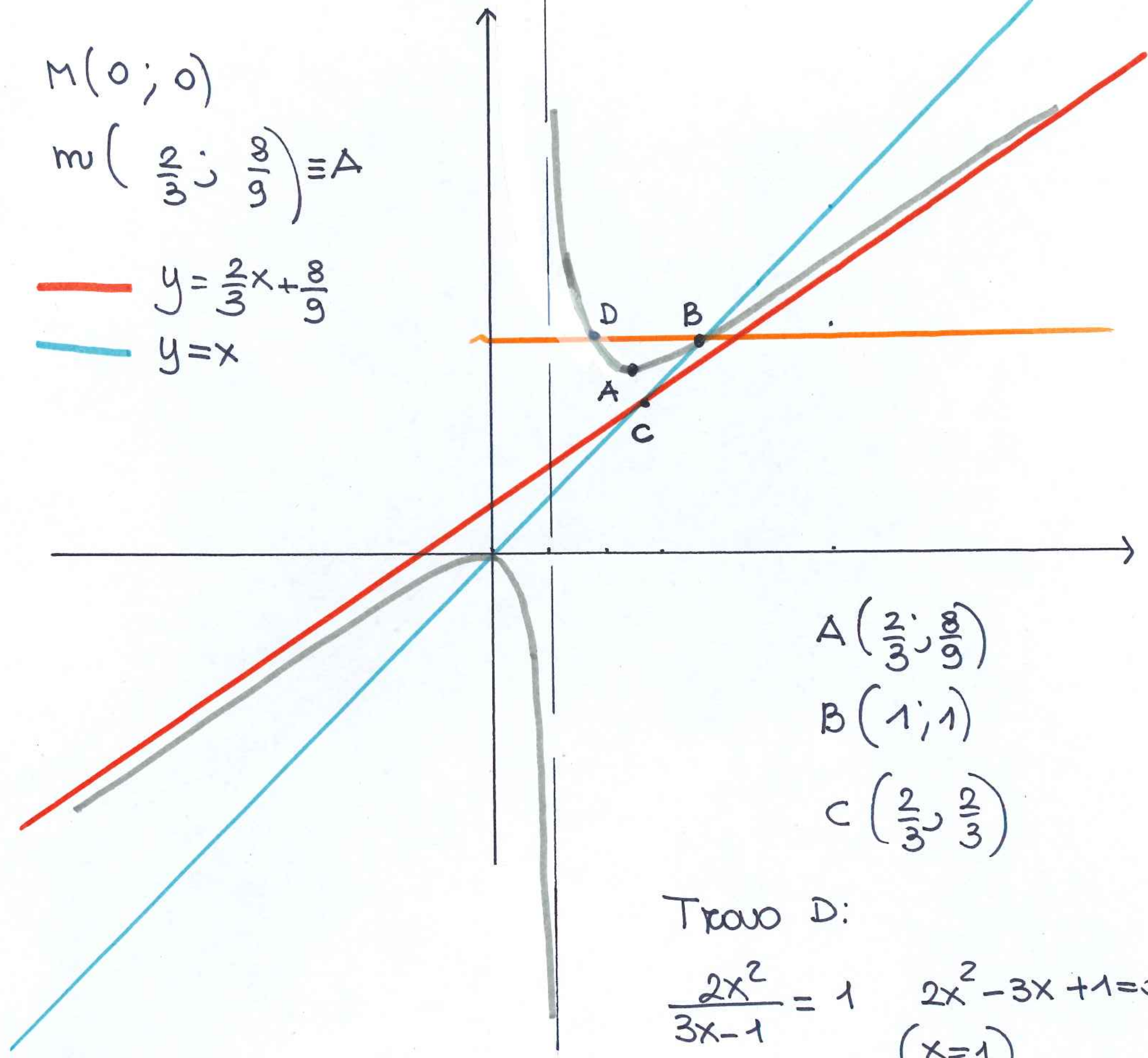
$$g'(x) = 2\frac{2x(3x-1)-x^2\cdot 3}{(3x-1)^2} = \frac{2(6x^2-2x-3x^2)}{(3x-1)^2} = 2\frac{(3x^2-2x)}{(3x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) \geq 0 \quad \left(x \leq 0 \cup x \geq \frac{2}{3}\right) \wedge x \neq \frac{1}{3}$$

	0		1/3		2/3	
+	0	−	∄	−	0	+
↗		↘		↘		↗

$M(0;0)$

$m\left(\frac{2}{3};\frac{8}{9}\right) \equiv A$



$A\left(\frac{2}{3};\frac{8}{9}\right)$

$B(1;1)$

$C\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

Trovo D:

$\frac{2x^2}{3x-1}=1 \qquad 2x^2-3x+1=0$

$(x=1)$

$x=\frac{1}{2}$

$D\left(\frac{1}{2};1\right)$

$g'(0)=0 \qquad g''(0)\neq 0$ $\qquad$ 2° ordine $\Rightarrow$ converge in $I(0)$

$g'(1)=\frac{1}{2}\neq 0$, <1 $\qquad$ 1° ordine $\Rightarrow$ converge in $I(1)$

$$g'(x) = \frac{6x^2-4x}{(3x-1)^2} = 2 \cdot \frac{3x^2-2x}{(3x-1)^2}$$

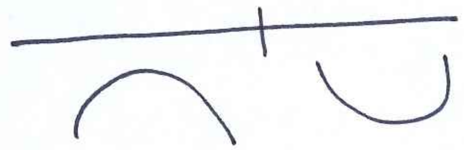
$$g''(x) = 2 \cdot \frac{(6x-2)(3x-1)^2 - (3x^2-2x)(2)(3x-1)\cdot 3}{(3x-1)^4} =$$

$$= \frac{4(3x-1)\left[(9x^2-6x+1) - 3(3x^2-2x)\right]}{(3x-1)^4} =$$

$$= \frac{4}{(3x-1)^3}\left(9x^2-6x+1-9x^2+6x\right) = \frac{4}{(3x-1)^3} > 0$$

$$x > \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3}$



$$g''(x) = \frac{4}{(3x-1)^3} \neq 0 \quad \forall x$$

$x_0 < 0$: succ. mon. cresc. lim. sup da 0 : $x_n \nearrow 0$

$x_0 = 0$: $x_k = 0 \quad \forall k$

$0 < x_0 < \frac{1}{3}$: $x_1 < 0 \Rightarrow$ vedi $x_0 < 0$

$x_0 = \frac{1}{3}$ IMPOSSIBILE

$\frac{1}{3} < x_0 < \frac{1}{2}$ $\quad x_1 > 1$

$x_0 = \frac{1}{2}$ $\quad x_1 = 1$ $\quad$ P.F.

$\frac{1}{2} < x_0 < \frac{2}{3}$ $\quad \frac{8}{9} < x_1 < 1$

$\frac{2}{3} < x_0 < 1$ succ. mon. cresc. lim sup da 1 : $x_n \nearrow 1$

$x_0 = 1$ $\quad x_k = 1$

$x_0 > 1$ succ. mon decr. lim inf. da 1

RIEPILOGO

$x_0 < \frac{1}{3}$ $\quad x_n \to \alpha = 0$

$x_0 > \frac{1}{3}$ $\quad x_n \to \beta = 1$

3) Dato l'integrale definito

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\mathrm{d}x$$

stimare (in funzione di $n \in \mathbb{N}$) quanti sottointervalli di uguale ampiezza M sono necessari, affinchè l'errore assoluto della formula dei trapezi compositi sia minore di 10^{-3}. Si utilizzi la stima classica dell'errore.

Mate MILANO
6-7-2017

$$H = \frac{1}{M}$$

$$\underbrace{\left| \int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx - FQ_{T,C} \right|}_{E} = \frac{1}{12}(b-a)H^2 \, |f''(t)| \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$b - a = 1$$

$$H^2 = \frac{1}{M^2}$$

$$f(t) = \sin(n\pi t)$$

$$f'(t) = n\pi \cos(n\pi t)$$

$$f''(t) = -(n\pi)^2 \sin(n\pi t)$$

$$E \leq \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{M^2} \max_{0 \leq t \leq 1} \left| -(n\pi)^2 \sin(n\pi t) \right| =$$

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{M^2} \cdot n^2\pi^2 < \frac{1}{1000}$$

$$M > \frac{1000}{12} n^2\pi^2 \qquad M > n \cdot \pi \underbrace{\sqrt{\frac{1000}{12}}}_{28.7} \ldots$$

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

si consideri il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I - \theta A)\mathbf{x}^{(k)} + \theta \mathbf{b}, \quad \theta > 0.$$

4.1) Fornire una condizione necessaria e sufficiente su θ affinchè il metodo iterativo risulti convergente

4.2) Trovare il valore ottimale θ^*, cioè il valore di θ per cui il raggio spettrale della matrice di iterazione associata al metodo iterativo sia minimo, al variare di $\theta \in \mathbb{R}$.

Milano 6-7-2017

Matrice di iterazione

$$B_\theta = I - \theta A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 2\theta & 4\theta & \theta \\ 0 & 0 & 2\theta \end{bmatrix} =$$

$$\left[\begin{array}{l} x = (I - \theta A)x + \theta b \\ \cancel{x} = \cancel{x} - \theta A x + \theta b \\ \theta(Ax - b) = 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1-\theta-\lambda & 0 & 0 \\ -2\theta & 1-4\theta-\lambda & -\theta \\ 0 & 0 & 1-2\theta-\lambda \end{bmatrix}$$

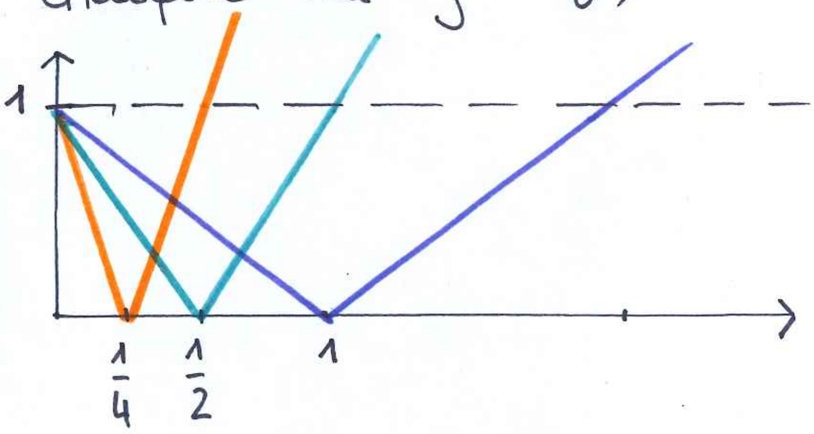
$$(1-\theta-\lambda)(1-4\theta-\lambda)(1-2\theta-\lambda) = 0$$

$\lambda = 1-\theta$ $\quad |1-\theta| < 1 \quad 0 < \theta < 2$

$\lambda = 1-4\theta$ $\quad |1-4\theta| < 1 \quad 0 < \theta < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta < \frac{1}{2}$

$\lambda = 1-2\theta$ $\quad |1-2\theta| < 1 \quad 0 < \theta < 1$

Grafico di $\rho(B_\theta)$



Ricerca di θ^*

$\min \rho(\theta)$
$0 < \theta < \frac{1}{2}$

$$|1-\theta| = |1-4\theta|$$
$$1-\theta = 4\theta - 1$$
$$5\theta = 2$$
$$\theta^* = \frac{2}{5}$$

5) Dimostrare che la funzione $s : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, definita da

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x^2 + x & x \in [-a, 0) \\ x & x \in [0, a] \end{cases}$$

è una spline quadratica sulla suddivisione $\{-a, 0, a\}$ interpolante i dati $(-a, 0)$, $(0, 0)$, (a, a).

Mate MILANO

6-7-2017

$s \in C^1[-a, a]$

$s|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathbb{P}_2$

$i = 1, 2$

$x_0 = -a$

$x_1 = 0$

$x_2 = a$

$s(0^-) = 0$

$s(0^+) = 0$

$$s'(x) = \begin{cases} \frac{2}{a}x + 1 \\ 1 \end{cases}$$

$s'(0^-) = 1 = s'(0^+)$

$s(-a) = \frac{1}{a} \cdot a^2 - a = 0$

$s(0) = 0$

$s(a) = a$