CALCOLO NUMERICO 1 (6 luglio 2017)

1) Verificare che $\forall x \neq 0$ la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

è ben condizionata.

2) Applicare il metodo di Newton all'equazione non lineare

$$f(x) \equiv x^3 - 2x^2 + x = 0,$$

e, dopo avere espresso il metodo di Newton nella forma $x_{k+1} = g(x_k),\ k \geq 0$, discuterne la convergenza al variare di $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{3}\}$.

Stabilire l'ordine di convergenza del metodo.

3) Dato l'integrale definito

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\mathrm{d}x$$

stimare (in funzione di $n \in \mathbb{N}$) quanti sottointervalli di uguale ampiezza M sono necessari, affinchè l'errore assoluto della formula dei trapezi compositi sia minore di 10^{-3}. Si utilizzi la stima classica dell'errore.

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

si consideri il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I - \theta A)\mathbf{x}^{(k)} + \theta\mathbf{b}, \quad \theta > 0.$$

4.1) Fornire una condizione necessaria e sufficiente su θ affinchè il metodo iterativo risulti convergente

4.2) Trovare il valore ottimale θ^*, cioè il valore di θ per cui il raggio spettrale della matrice di iterazione associata al metodo iterativo sia minimo, al variare di $\theta \in \mathbb{R}$.

5) Dimostrare che la funzione $s : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, definita da

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x^2 + x & x \in [-a, 0) \\ \\ x & x \in [0, a] \end{cases}$$

è una spline quadratica sulla suddivisione $\{-a, 0, a\}$ interpolante i dati $(-a, 0)$, $(0, 0)$, (a, a).