Cognome: ______________________ Nome: ______________________ Matricola: ____________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 6 luglio 2017

1) Si considerino le seguenti n coppie di dati sperimentali

$x_{d,i}$	1	1	1	7	11	14	14
$y_{d,i}$	1	1	1	2	5	2	2

1.1 Si supponga che i dati possano essere fittati con la legge lineare $y = ax + b$ oppure con la legge quadratica $y = cx^2 + dx + e$. Si determini il valore dei parametri a e b e successivamente c, d, e mediante un approccio ai minimi quadrati

1.2 Si calcoli per le due approssimazioni precedentemente trovate l'errore $e_q = \left(\sum_{i=1}^{n}(y(x_{d,i}) - y_{d,i})^2\right)^{1/2}$, essendo $x_{d,i}$ e $y_{d,i}$, $i = 1, \ldots, n$, l'ascissa e l'ordinata dei dati misurati, rispettivamente. Sulla base di questi risultati, quale è la approssimazione da preferire?

1.3 Ci si riferisca ora alla sola approssimazione lineare ai minimi quadrati. Con quale punto particolare coincide la coppia di dati $(7, 2)$? Cosa si può dire riguardo il passaggio della retta ai minimi quadrati per tale punto?

(1.1):
parametri retta ai minimi quadrati: $a =$ $b =$

parametri parabola ai minimi quadrati: $c =$ $d =$ $e =$

(1.2):
errori: retta ai minimi quadrati $e_q =$ parabola ai minimi quadrati $e_q =$

commento:

(1.3):
commento sulla misurazione $(7, 2)$:

2) Data l'equazione non lineare $f(x) \equiv 2^x - 3 + x = 0$ avente un'unica radice positiva α, per l'approssimazione di α si considerino i due metodi iterativi di punto fisso

$$x_n = g_1(x_{n-1}) = 3 - 2^{x_{n-1}} + \frac{2}{3}(x_{n-1} - 1), \qquad x_n = g_2(x_{n-1}) = \log_2(3 - x_{n-1}).$$

Si verifichi che g_1 e g_2 hanno come punto fisso la radice α di f.

Per ciascuno dei due metodi si trovi il numero di iterazioni (rispettivamente $\mathtt{it}_1$ e $\mathtt{it}_2$) necessarie affinché $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-5}$, scegliendo come valore di innesco $x_0 = 1.2$. Sia α_1 l'approssimazione di α ottenuta con il metodo $x_n = g_1(x_{n-1})$ e α_2 l'approssimazione di α ottenuta con il metodo $x_n = g_2(x_{n-1})$. Successivamente, si approssimi il valore della derivata di f nel punto α calcolando le quantità:

$$\phi = \frac{f(\alpha_1) - f(\alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

$$\phi_1 = f'(\alpha_1), \qquad \phi_2 = f'(\alpha_2).$$

Si calcolino infine $e_1 = |\phi - \phi_1|$, $e_2 = |\phi - \phi_2|$.

RISULTATI

$\mathtt{it}_1 =$ $\qquad\qquad$ $\alpha_1 =$ $\qquad\qquad$ $e_1 =$

$\mathtt{it}_2 =$ $\qquad\qquad$ $\alpha_2 =$ $\qquad\qquad$ $e_2 =$

3) Si consideri la matrice 20×20

$$B = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \varepsilon & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \varepsilon & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

e le matrici

$$A_{n,\varepsilon} = nI_{20} - B + \varepsilon B^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

con $\varepsilon = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$, dove I_{20} è la matrice Identica di ordine 20.
Trovare il minimo valore di n, sia esso N, affinché $\min(\lambda(A_{N,\varepsilon})) > 0$.
Dopo aver calcolato i rapporti

$$r(\varepsilon) = \frac{K_2(B)}{K_2(A_{N,\varepsilon})}, \quad \varepsilon = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$$

si ipotizzi una relazione del tipo

$$r(\varepsilon) = C\varepsilon^p,$$

e si deduca sperimentalmente il valore di p.

RISULTATI

ε	N	$\min(\lambda(A_{N,\varepsilon}))$	$r(\varepsilon)$
10^{-5}			
10^{-4}			
10^{-3}			
10^{-2}			

$p =$ $\qquad\qquad$ (commentare la risposta)