1) Si consideri la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - (2-x)^3$.

1.1) Dimostrare che f ha un unico zero $\alpha \in [0,1]$;

1.2) determinare un opportuno intervallo $[a,b]$ tale che il metodo iterativo di punto fisso $x_{n+1} = 2 - e^{x_n/3}$ converga ad α, $\forall x_0 \in [a,b]$;

1.3) costruire il metodo di Newton per il calcolo di α e discuterne la convergenza per $x_0 \in [0,1]$.

MILANO 5.7.18

$f(x) = e^x - (2-x)^3 \quad x \in [0,1]$

1.1) $f(0) = 1 - 8 = -7$; $f(1) = e - 1 \simeq 1.718 > 0$ $\Rightarrow \exists! \alpha \in [0,1]$

$f'(x) = e^x - 3(2-x)^2(-1) = e^x + 3(2-x)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1.2) Teorema (Vedi dispensa EZ pg. 40)

$$g(x) = 2 - e^{\frac{x}{3}}$$

$\left[e^x - (2-x)^3 = 0 \quad (2-x)^3 = e^x \quad 2-x = e^{\frac{x}{3}} \quad x = 2 - e^{\frac{x}{3}} \right]$

$g(0) = 2 - 1 = 1 \qquad g(1) = 2 - \sqrt[3]{e} \simeq 0.6044$

$g'(x) = -\frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}} \qquad |g'(x)| < 1 \quad e^{\frac{x}{3}} < 3 \quad \frac{x}{3} < \ln 3 \quad x < 3 \ln 3$

g decrescente $\Rightarrow g[0,1] \subset [0,1]$

Le ipotesi del teorema sono verificate

Il metodo iterativo converge ad α $\forall x_0 \in [0,1]$

1.3) $f(0) = -7$, $f'(0) = 1 + 3 \cdot 8 = 25$

$f(1) = e - 1$, $f'(1) = e + 3 \simeq 5.718$

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1] \qquad f''(x) = e^x + 6(2-x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$

$\left| \frac{f(0)}{f'(0)} \right| = \frac{7}{25} < 1 \qquad \left| \frac{f(1)}{f'(1)} \right| = \frac{e-1}{e+3} < 1$

$\Rightarrow$ md Newton converge ad α con ordine 2

$\forall x_0 \in [0,1]$

2) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

e stabilire per quali $x \in (1, \infty)$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 10$.

MILANO 5.7.18

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} \qquad x \in (1, \infty)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1-x+1}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}\,(x+1)} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}\,(x+1)}$$

$$K_f(x) = \left| \frac{\frac{x}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}\,(x+1)}}{\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}} \right| = \left| \frac{x}{\sqrt{x-1}\,\cancel{\sqrt{x+1}}\,(x+1)} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x-1}} \right|$$

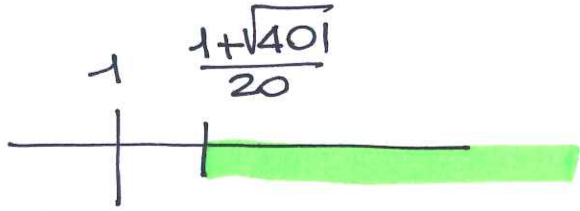
$$= \frac{x}{(x-1)(x+1)} \qquad \boxed{(\text{N.B. } x \in (1, +\infty))}$$

$$K_f(x) < 10 \qquad \frac{x}{x^2-1} < 10$$

$$10x^2 - x - 10 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 400}}{20} = \frac{1 \pm \sqrt{401}}{20}$$

$$x > \frac{1+\sqrt{401}}{20}$$



3) Data la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \alpha_1 f(-\frac{1}{3}) + \alpha_2 f(0) + \alpha_3 f(\frac{1}{3}) ,$$

si calcolino i valori dei parametri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ per i quali la formula ha grado di precisione massimo e si indichi quanto vale tale grado di precisione.

MILANO 5.7.18

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \alpha_1 f\left(-\frac{1}{3}\right) + \alpha_2 f(0) + \alpha_3 f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$r=0 \quad f(x)=1$

$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \qquad$ F.Q. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \qquad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2$

$r=1 \quad f(x)=x$

$\int_{-1}^{1} x\,dx=0 \qquad$ F.Q. $-\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_3 \qquad \alpha_1=\alpha_3$

$r=2 \quad f(x)=x^2$

$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \qquad$ F.Q. $\frac{1}{9}\alpha_1+\frac{1}{9}\alpha_3 \qquad \frac{1}{9}\alpha_1+\frac{1}{9}\alpha_3=\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} \text{———} \\ \alpha_1=\alpha_3 \\ 2\alpha_1=6 \end{cases} \quad \begin{cases} 6+\alpha_2=2 \\ \alpha_3=3 \\ \alpha_1=3 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2=-4 \\ \alpha_3=3 \\ \alpha_1=3 \end{cases} \qquad \text{F.Q.}: 3f\left(-\frac{1}{3}\right)-4f(0)+3f\left(\frac{1}{3}\right)$$

G.P. $r=3 \quad f(x)=x^3$

$\int_{-1}^{1} x^3 dx=0 \qquad$ F.Q. $3\left(-\frac{1}{3}\right)^3-4\cdot 0^3+3\left(\frac{1}{3}\right)^3=0 \qquad$ VERO

G.P. $r=4 \quad f(x)=x^4$

$\int_{-1}^{1} x^4 dx=\frac{2}{5} \qquad$ FQ. $3\left(-\frac{1}{3}\right)^4-4\cdot 0^4+3\left(\frac{1}{3}\right)^4=6\cdot\frac{1}{81}=\frac{2}{27}\neq\frac{2}{5}$

G.P. è 3

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & K & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad K \in \mathbb{R}, \quad A \text{ non singolare :}$$

4.1) determinare per quali valori di K la matrice A è definita positiva;

4.2) fissato un valore di K trovato al punto 4.1) per cui la matrice A risulta definita positiva, si consideri il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{\mathbf{n+1}} = \mathbf{x}^{(\mathbf{n})} + \beta\left(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(\mathbf{n})}\right)$$

con β parametro reale. Determinare per quali valori di β il metodo converge e stimare il valore β ottimale, cioè tale per cui la velocità di convergenza del metodo iterativo sia massima.

MILANO 5.7.18

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & K & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det A = 2(2K-4) + (-2) = 4K - 8 - 2 = 4K - 10$ NON SINGOLARE $\iff K \neq \frac{5}{2}$

4.1)

Def. Pos. $\begin{cases} 2 > 0 \\ 2K - 1 > 0 \\ 4K - 10 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \forall K \\ K > \frac{1}{2} \\ K > \frac{5}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow K \in \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$

4.2) Matrice di iterazione $\left(K > \frac{5}{2}\right)$

$B_\beta = I - \beta A$ (esercizio pg 62-65 dispensa)

$\lambda \in \sigma(A)$

$\eta \in \sigma(B_\beta)$ $\quad \eta = 1 - \lambda\beta$

Trovare λ:

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & K-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\left[(K-\lambda)(2-\lambda) - 4\right] + (2-\lambda)(-1) = 0$$

$$(2-\lambda)\left[2k-2\lambda-\lambda k+\lambda^2-4-1\right]=0$$

$$(2-\lambda)\left(\lambda^2-(k+2)\lambda+2k-5\right)=0$$

$$\lambda_2=2$$

$$\lambda=\frac{k+2\pm\sqrt{k^2+4k+4-8k+20}}{2}=\frac{k+2\pm\sqrt{k^2-4k+24}}{2}$$

$$\lambda_3=\frac{k+2+\sqrt{k^2-4k+24}}{2}$$

$$\lambda_1=\frac{k+2-\sqrt{k^2-4k+24}}{2}$$

Gli autovalori sono positivi essendo A def. pos $\left(k>\frac{5}{2}\right)$

• Confronto $\lambda_3>\lambda_2$

$$k+2+\sqrt{k^2-4k+24}>4$$

$$\sqrt{k^2-4k+24}>\underbrace{2-k}_{<0}$$ VERO

• Confronto $\lambda_1<\lambda_2$

$$k+2-\sqrt{k^2-4k+24}<4$$

$$\underbrace{k-2}_{>0}<\sqrt{k^2-4k+24}$$

$$\cancel{k^2}-\cancel{4k}+4<\cancel{k^2}-\cancel{4k}+24$$ Vero

Condizione di convergenza N.S.

$$0 < \beta < \frac{2}{\max \lambda_i} = \frac{2}{\frac{K+2+\sqrt{K^2-4K+24}}{2}}$$

β ottimale:

$$\beta_{ott} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_3} = \frac{2}{\frac{K+2+\sqrt{\ldots\ldots} + K+2-\sqrt{\ldots\ldots}}{2}} =$$

$$= \frac{4}{2(K+2)} = \frac{2}{K+2}$$