

CALCOLO NUMERICO 1 (5 luglio 2018)

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Si consideri la funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - (2 - x)^3$.

1.1) Dimostrare che f ha un unico zero $\alpha \in [0, 1]$;

1.2) determinare un opportuno intervallo $[a, b]$ tale che il metodo iterativo di punto fisso $x_{n+1} = 2 - e^{x_n/3}$ converga ad α , $\forall x_0 \in [a, b]$;

1.3) costruire il metodo di Newton per il calcolo di α e discuterne la convergenza per $x_0 \in [0, 1]$.

2) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

e stabilire per quali $x \in (1, \infty)$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 10$.

3) Data la formula di quadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq \alpha_1 f\left(-\frac{1}{3}\right) + \alpha_2 f(0) + \alpha_3 f\left(\frac{1}{3}\right),$$

si calcolino i valori dei parametri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ per i quali la formula ha grado di precisione massimo e si indichi quanto vale tale grado di precisione.

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & K & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad K \in \mathbb{R}, \quad A \text{ non singolare :}$$

4.1) determinare per quali valori di K la matrice A è definita positiva;

4.2) fissato un valore di K trovato al punto 4.1) per cui la matrice A risulta definita positiva, si consideri il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^{(n)} + \beta (\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(n)})$$

con β parametro reale. Determinare per quali valori di β il metodo converge e stimare il valore β ottimale, cioè tale per cui la velocità di convergenza del metodo iterativo sia massima.

5) Data una formula di quadratura interpolatoria sull'intervallo $[0, 1]$, con grado di precisione 2, è vero (nel caso dimostrarlo) o falso (nel caso fornire un controesempio) che i pesi della formula di quadratura sono positivi?