CALCOLO NUMERICO (4 luglio 2019)

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Data la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x+1},$$

1.1) interpolarla con un polinomio $p_2(x)$ di grado 2 nei nodi $\{1, 2, 3\}$;

1.2) maggiorare l'errore massimo di interpolazione sull'intervallo $[1, 3]$

$$E = max_{x \in [1,3]} |f(x) - p_2(x)|;$$

1.3) Scrivere l'espressione della funzione spline lineare interpolante $f(x)$ negli stessi nodi $\{1, 2, 3\}$.

x_i	1	2	3
y_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

1.1)

$$\begin{array}{lllll} 1 & 1/2 & & & \\ & & \frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6} & & \\ 2 & 1/3 & & \dfrac{-\frac{1}{12}+\frac{1}{6}}{3-1} & = \frac{1}{24} \\ & & \frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12} & & \\ 3 & 1/4 & & & \end{array}$$

$p_2(x) =$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6}(x-1) + \frac{1}{24}(x-1)(x-2) =$$

$$\frac{1}{24}x^2 - \frac{7}{24}x + \frac{3}{4}$$

1.2)

$$f(x) - p_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!} f^{(3)}(t) \qquad t \in [1,3]$$

$$\omega(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow \omega'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)$$

$$= 3x^2 - 12x + 11 \geq 0 \qquad x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{3} = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$

$$\omega\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right)\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3} - 2\right)\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3} - 3\right) = \left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\left|\omega\left(2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right| = \frac{2\sqrt{3}}{9}; \quad f'(t) = -\frac{1}{(t+1)^2} \quad f''(t) = \frac{2}{(t+1)^3} \quad f'''(t) = -\frac{6}{(t+1)^4}$$

$$E \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{6}{2^4} = \frac{\sqrt{3}}{72} \approx 0.024056$$

1.3)

$$S_1(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{2} & [1,2) \\ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)(x-2) + \frac{1}{3} & [2,3] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{12}x + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{6}x + \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{12}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

MI 4.7.19

2) Data la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \alpha\,[f(-1)+f(1)] + \beta\,[f'(-1)-f'(1)],$$

con $f \in C^2([-1,1])$, determinare i pesi α e β in modo che la formula abbia grado di precisione massimo. Utilizzare la formula per approssimare il valore dell'integrale definito

$$\int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

e calcolare l'errore commesso.

- $f=1 \quad f'=0$

$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \qquad \alpha(1+1)=2 \qquad \alpha = 1$

- $f=x \quad f'=1$

$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \qquad 1(-1)+1(1)+\beta(1-1)=0 \quad \forall\beta$

- $f=x^2 \quad f'=2x$

$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \qquad 1[1+1]+\beta(-2-2)=\frac{2}{3} \qquad 2-4\beta=\frac{2}{3} \qquad \beta=\frac{1}{3}$

- $f=x^3 \quad f'=3x^2$

$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 \qquad 1[-1+1]+\frac{1}{3}(3-3)=0$

GP è 3

- $f=x^4 \quad f'=4x^3$

$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \qquad 1(1+1)+\frac{1}{3}(-4-4) \neq \frac{2}{5}$

$\int_{-1}^{1} \cos\frac{\pi}{2}x\,dx = \frac{2}{\pi}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}x\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{\pi}\cdot 2 = \frac{4}{\pi} \approx 1.2732395$ 4π

$f(-1)+f(1)+\frac{1}{3}f'(-1)-\frac{1}{3}f'(1) \qquad f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x \quad f'(x)=-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$

$0 + 0 + \frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{3} \approx 1.047197551$

err ass $\approx 0.225\ldots$

3) Data la matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$, con elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} n^2 & i = j, \\ min(i,j) & i < j, \\ 0 & i > j, \end{cases}$$

MI 4.7.19

3.1) calcolare esplicitamente $\|A\|_1$ in funzione di n;

3.2) costruire la matrice di iterazione del metodo di Jacobi B_J, calcolare $\|B_J\|_1$ e dedurre se il metodo di Jacobi è o non è convergente, motivando la risposta.

$$\begin{bmatrix} n^2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n^2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & n-1 \\ 0 & 0 & & 0 & n^2 \end{bmatrix}$$

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = 1+2+\dots+(n-1)+n^2$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} + n^2 = \frac{3n^2-n}{2}$$

$$E(i,j) = -A(i,j) \quad i>j$$

$$B_J = +D^{-1}(E+F)$$

$$F(i,j) = -A(i,j) \quad i<j$$

$$B_J = -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n^2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n^2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{n^2} & \cdots & \frac{2}{n^2} \\ 0 & & 0 & \ddots & \frac{n-1}{n^2} \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$(B_J)(i,j) = -\frac{1}{n^2} \min(i,j) \quad i<j$$

$$\|B_J\|_1 = \frac{1}{n^2}\left[1+2+\dots+n-1\right] = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n^2-n}{2n^2} = \frac{n-1}{2n}$$

$$\frac{n-1}{2n} < 1 \qquad 2n > n-1 \qquad n > -1 \qquad \text{VERO}$$

Essendo $\rho(B_J) \leq \|B_J\|_1 < 1$ si ha convergenza del metodo di Jacobi

$\downarrow$

Vale $\forall$ norma naturale e $\forall$ matrice

4) Data $f(x) = x^3 - 15$, applicare il metodo di Newton per l'approssimazione dell'unica radice reale dell'equazione non lineare $f(x) = 0$ e, dopo averlo espresso nella forma di metodo di punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$, studiarne la convergenza alla radice stessa al variare di $x_0 > 0$.

MI 4.7.19

$x^3 - 15 = 0 \qquad \alpha = \sqrt[3]{15}$

$f'(x) = 3x^2 \qquad x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3 - 15}{3x_n^2} = \dfrac{2x_n^3 + 15}{3x_n^2} = \dfrac{2}{3}x_n + \dfrac{5}{x_n^2}$

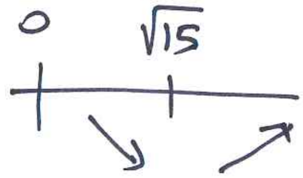
$g(x) = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{x^2} \qquad x \neq 0 \qquad g(\sqrt[3]{15}) = \sqrt[3]{15}$

AS VERT $x = 0$

AS OBL $y = \frac{2}{3}x$

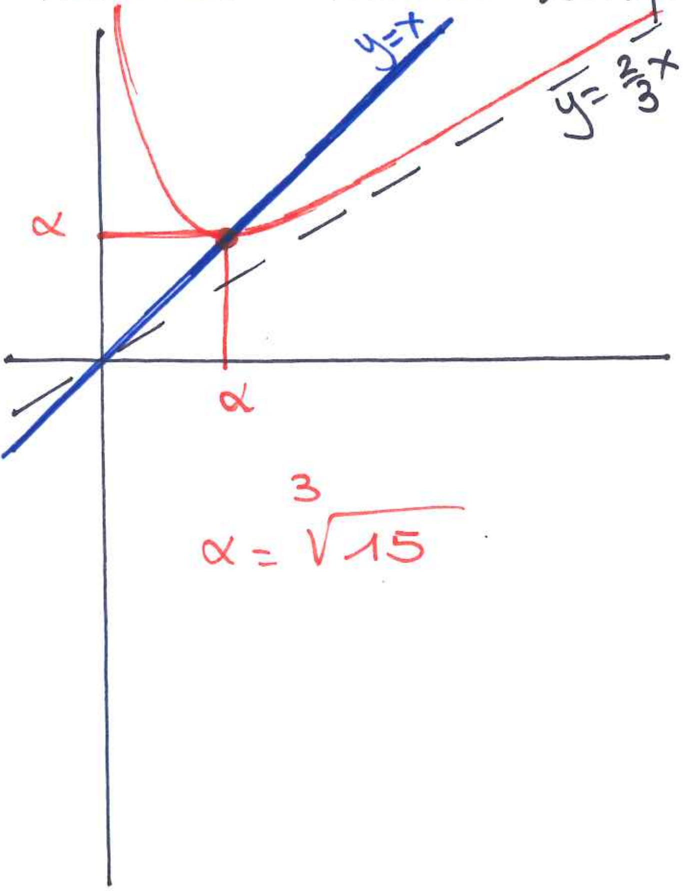
$g(x) > 0$ nell'intervallo considerato per lo studio della convergenza $x > 0$

$g'(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{10}{x^3} > 0 \qquad x^3 > 15 \qquad x > \sqrt[3]{15}$



minimo: p. fisso $(\sqrt[3]{15}, \sqrt[3]{15})$

Newton – Radice semplice – $g'(\alpha) = 0$ – 2° ordine



1) $\alpha < x_0 < +\infty$

succ. mon. decresc.

lim inf da α: $x_n \searrow \alpha$

2) $0 < x_0 < \alpha$

$x_1 > \alpha$ Caso 1

Convergenza ad α

$\forall x_0 > 0$

5) Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice non singolare con fattorizzazione $A = LU$. Che relazione c'é tra il numero di condizionamento $K_1(A)$ e quello dei due fattori $K_1(L)$ e $K_1(U)$?

M1 4.7.19

$$\|A\| = \|LU\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$$

$$\|A^{-1}\| = \|(LU)^{-1}\| \leq \|U^{-1}\| \cdot \|L^{-1}\|$$

$$K(A) \leq K(L)\, K(U) \quad \forall \text{ norma naturale}$$