

CALCOLO NUMERICO (4 luglio 2019)

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Data la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x+1},$$

1.1) interpolarla con un polinomio $p_2(x)$ di grado 2 nei nodi $\{1, 2, 3\}$;

1.2) maggiorare l'errore massimo di interpolazione sull'intervallo $[1, 3]$

$$E = \max_{x \in [1,3]} |f(x) - p_2(x)|;$$

1.3) Scrivere l'espressione della funzione spline lineare interpolante $f(x)$ negli stessi nodi $\{1, 2, 3\}$.

2) Data la formula di quadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \alpha [f(-1) + f(1)] + \beta [f'(-1) - f'(1)],$$

con $f \in C^2([-1, 1])$, determinare i pesi α e β in modo che la formula abbia grado di precisione massimo.

Utilizzare la formula per approssimare il valore dell'integrale definito

$$\int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

e calcolare l'errore commesso.

3) Data la matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$, con elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} n^2 & i = j, \\ \min(i, j) & i < j, \\ 0 & i > j, \end{cases}$$

3.1) calcolare esplicitamente $\|A\|_1$ in funzione di n ;

3.2) costruire la matrice di iterazione del metodo di Jacobi B_J , calcolare $\|B_J\|_1$ e dedurre se il metodo di Jacobi è o non è convergente, motivando la risposta.

4) Data $f(x) = x^3 - 15$, applicare il metodo di Newton per l'approssimazione dell'unica radice reale dell'equazione non lineare $f(x) = 0$ e, dopo averlo espresso nella forma di metodo di punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$, studiarne la convergenza alla radice stessa al variare di $x_0 > 0$.

5) Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice non singolare con fattorizzazione $A = LU$. Che relazione c'è tra il numero di condizionamento $K_1(A)$ e quello dei due fattori $K_1(L)$ e $K_1(U)$?