Cognome: ________________ Nome: ________________ Matricola: __________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 4 luglio 2019

1) Sia $f(x) = \sin(x)$ definita nell'intervallo $I = [0, 2\pi]$ e si considerino su tale intervallo 5 nodi di interpolazione scelti come equispaziati (E) o come nodi di Chebyshev (C). Detti m, M i due valori reali (da determinare) tali che $m \leq f^{(5)}(x) \leq M, x \in I$, si definiscano

$$\epsilon_m^{(K)}(x) = \frac{\omega(x)}{5!}m, \qquad \epsilon_M^{(K)}(x) = \frac{\omega(x)}{5!}M,$$

con $(K) = (E)$ e $(K) = (C)$, dove $\omega(x) = \Pi_{i=0}^{4}(x - x_i)$ è il polinomio nodale. Sia $R^{(K)}(x) = f(x) - P_n^{(K)}f(x)$ l'errore di interpolazione nel punto x, $P^{(K)}f(x)$ essendo il polinomio di interpolazione ottenuto per i nodi di tipo $(K) = (E)$ o $(K) = (C)$. Siano ora dati i punti $z_1 = \pi/3$, $z_2 = 3\pi/2$, $z_3 = 15\pi/8$; si verifichi che valgono le seguenti relazioni $(j = 1, 2, 3)$:

$$\begin{cases} \epsilon_m^{(K)}(z_j) \leq R^{(K)}(z_j) \leq \epsilon_M^{(K)}(z_j) & \text{se} \quad \omega(z_j) \geq 0, \\ \epsilon_m^{(K)}(z_j) \geq R^{(K)}(z_j) \geq \epsilon_M^{(K)}(z_j) & \text{se} \quad \omega(z_j) < 0. \end{cases}$$

RISULTATI (in `format short e`)

nodi	$\epsilon_m^{(K)}(z_1)$	$E^{(K)}(z_1)$	$\epsilon_M^{(K)}(z_1)$
(E)			
(C)			

nodi	$\epsilon_m^{(K)}(z_2)$	$E^{(K)}(z_2)$	$\epsilon_M^{(K)}(z_2)$
(E)			
(C)			

nodi	$\epsilon_m^{(K)}(z_3)$	$E^{(K)}(z_3)$	$\epsilon_M^{(K)}(z_3)$
(E)			
(C)			

2) Per il calcolo degli integrali

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\, dx, \quad n = 3, 5, 7, 9$$

si consideri la formula ricorsiva

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2},\ n = 3, 5, 7, 9, \quad \text{essendo } I_1 = 1.$$

Si calcolino i valori di I_n con la formula ricorsiva e li si approssimino con la formula di quadratura dei trapezi compositi utilizzando $M = 10$ sottointervalli di uguale ampiezza (sia I_n^{TC} il corrispondente valore approssimato di I_n). Riportare nella tabella i valori I_n, I_n^{TC}, e l'errore assoluto $e_n = |I_n - I_n^{TC}|$.

n	I_n	I_n^{TC}	e_n
3			
5			
7			
9			

3) Date le funzioni

$$g(x) = \frac{x^2+5}{2x}, \ h(x) = \frac{1}{2}x\left(3 - \frac{x^2}{5}\right),$$

aventi in comune il punto fisso $\alpha = \sqrt{5}$,

3.1) si approssimi α mediante i metodi iterativi

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad x_{k+1} = h(x_k) \quad k \geq 0,$$

utilizzando $x_0 = 3.4$ e test d'arresto $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-4}$. Siano G e H il numero di iterazioni necessarie a soddisfare il test d'arresto rispettivamente per i due metodi iterativi ed $e_G = |x_G - \alpha|$, $e_H = |x_H - \alpha|$ i rispettivi errori assoluti calcolati utilizzando il valore esatto di α.

Fornire inoltre le quantità

$$r_G = \frac{e_G}{e_{G-1}^2}, \quad r_H = \frac{e_H}{e_{H-1}^2}.$$

3.2) Successivamente si approssimi α mediante il metodo iterativo

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad f(x) = 0.37g(x) + 0.63h(x), \quad k \geq 0,$$

con x_0 e test d'arresto dati come nel punto 3.1). Sia F il numero di iterazioni necessarie e $e_F = |x_F - \alpha|$ il corrispondente errore assoluto. Fornire infine la quantità

$$r_F = \frac{e_F}{e_{F-1}^2}.$$

RISULTATI

metodo	numero iterazioni	errore	rapporti
$x_{k+1} = g(x_k)$	$G =$	$e_G =$	$r_G =$
$x_{k+1} = h(x_k)$	$H =$	$e_H =$	$r_H =$
$x_{k+1} = f(x_k)$	$F =$	$e_F =$	$r_F =$