

CALCOLO NUMERICO 1 (8 maggio 2013)

- 1) Per approssimare l'integrale definito $I = \int_{-1}^1 |x| dx$, si applichi la formula dei trapezi composti prima con 3 e poi con 4 sottointervalli di uguale ampiezza. Si calcoli in entrambi i casi l'errore commesso e si commentino i risultati ottenuti. Successivamente si approssimi I con la formula di Gauss-Legendre a due punti e si calcoli l'errore commesso.
- 2) Studiare la convergenza e l'ordine del metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ per la ricerca dei punti fissi della funzione

$$g(x) = \begin{cases} \frac{24}{25} + \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 & x < 1 \\ 1 + (x - 1)^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

al variare di $x_0 \geq 0$.

- 3) Si consideri una curva parametrica nel piano (x, y) definita come segue,

$$x(t) = e^{-t^2+1}, \quad y(t) = 2 \cos(\pi t)$$

con $t \in I = [0, 3]$. Approssimare con spline lineari sia $x(t)$ che $y(t)$ rispetto alla suddivisione $t_i = i$, $i = 0, 1, 2, 3$. Stimare l'errore

$$E = \max_{t \in I} |x(t) - S_x(t)| + \max_{t \in I} |y(t) - S_y(t)|$$

dove $S_x(t)$ e $S_y(t)$ sono le due spline lineari trovate precedentemente.

- 4) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & a & a \\ a & 4 & a \\ a & a & 4 \end{pmatrix},$$

ed $a \in \mathbb{R}$.

- Determinare per quali valori di a la matrice A è definita positiva.
 - Discutere al variare del parametro a la convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel.
- 5) Discutere (esistenza, unicità, accuratezza,...) il seguente problema di interpolazione. Assegnati i valori $a < b$, y_a, y_b, z_a, z_b , determinare un polinomio $P(x)$ di terzo grado tale che

$$P(a) = y_a, \quad P(b) = y_b, \quad P'(a) = z_a, \quad P'(b) = z_b.$$