CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 7 maggio 2013

1) Si consideri la matrice A di ordine 4, avente 1 sulla prima colonna ed elementi $a_{ij} = j^i,\ j > 1,\ \forall i$, e il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, dove $\mathbf{f}$ è il termine noto corrispondente alla soluzione $\mathbf{x} = [1\ 1...1]^T$. Si consideri la matrice perturbata $A_\varepsilon = A + B$ ($\varepsilon = 10$, $\varepsilon = 1$), dove B è la matrice avente elementi uguali a ε sull'ultima riga e zero altrove. Risolvere il sistema perturbato $A_\varepsilon \mathbf{x}_\varepsilon = \mathbf{f}$ utilizzando il metodo iterativo: $\mathbf{x}_\varepsilon^{(0)} = \mathbf{x}$,

   $r^{(m)} = \mathbf{f} - A_\varepsilon \mathbf{x}_\varepsilon^{(m)}$

   $A\mathbf{w}_\varepsilon^{(m)} = r^{(m)}$ (utilizzare la fattorizzazione LU della matrice A)

   $\mathbf{x}_\varepsilon^{(m+1)} = \mathbf{x}_\varepsilon^{(m)} + \mathbf{w}_\varepsilon^{(m)}$

   Siano $\overline{m}$ il minimo intero per cui $\|r^{(m)}\|_2 < 10^{-8}$ e $\Delta\mathbf{x} = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\varepsilon^{(\overline{m})}\|_2$.

   Risultati:

   $\varepsilon = 10:\quad \overline{m} = \qquad\qquad \Delta\mathbf{x} =$

   $\varepsilon = 1:\quad \overline{m} = \qquad\qquad \Delta\mathbf{x} =$

2) I due zeri del polinomio di Legendre di secondo grado, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, sono i due nodi di una formula di quadratura di Gauss-Legendre sull'intervallo $[-1, 1]$. Trovare l'espressione dei nodi z_1, z_2 per un intervallo generico $[a, b]$: $z_1 =$ $\qquad\qquad$ $z_2 =$

   Applicare la formula di quadratura che utilizza z_1 e z_2 per approssimare l'integrale definito

   $$I = \int_0^4 e^{-t^2} dt.$$

   A tale scopo si consideri prima tutto l'intervallo $[0, 4]$ ($I \approx I_s$, formula semplice) e poi la somma degli integrali su $[0, 2]$ e $[2, 4]$, rispettivamente ($I \approx I_c$, formula composita). Confrontare I_s e I_c con il valore I_{MAT} ottenuto mediante la function MATLAB `erf` così definita:

   $$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

   Fornire gli errori:

   $E_s = |I_{MAT} - I_s| =$ $\qquad\qquad$ $E_c = |I_{MAT} - I_c| =$

3) La legge di crescita di una popolazione p sia data dalla seguente legge,

   $$p(t) = \frac{p_M}{1 + (p_M/p_0)e^{-Kp_M t}}$$

   dove $t \geq 0$ è il tempo, p_M una limitazione massima per la popolazione, p_0 la popolazione al tempo iniziale $t = 0$ e K un parametro di crescita. Stimare attraverso un metodo numerico il tempo in cui la popolazione raggiunge il valore $p_M/2$ quando $p_M = 100$, $p_0 = 5$, $K = 1.2$.

   `[Suggerimento: risolvere numericamente l'equazione` $p(t) = p_M/2$`]`