**CALCOLO NUMERICO 1** (8 Maggio 2014)

1) Trovare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x^3 - 1},$$

e stabilire per quali $x > 1$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 100$.

2) Data la funzione $f(x) = x^3 - (k+1)x^2 + k,\ k > 0$ :

2.1) per quali $k$ l'equazione $f(x) = 0$ ammette come soluzione $\alpha = 1$?

2.2) Studiare il numero e la molteplicità delle soluzioni reali dell'equazione $f(x) = 0$.

2.3) Posto $k = 1$ si dimostri che il metodo di Newton converge alla radice $\beta > 1$ per ogni scelta del valore iniziale $x_0 \in [\frac{3}{2}, 2]$.

3) Costruire il polinomio dei minimi quadrati discreti $p_1 \in \mathbb{P}_1$ relativo ai dati $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2$, dove:

$$x_0 = -\frac{1}{\alpha},\ x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{\alpha},\ (\alpha > 0), \quad f(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

e calcolare l'errore globale commesso $E = \sum_{i=0}^{2} [f(x_i) - p_1(x_i)]^2$.

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

Si consideri poi il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I - \frac{1}{m}A)\mathbf{x}^{(k)} + \frac{\mathbf{b}}{m}, \quad m > 0.$$

4.1) Senza costruire il polinomio caratteristico della matrice di iterazione associata al metodo iterativo, fornire una condizione necessaria e sufficiente su $m$ affinchè il metodo iterativo risulti convergente (si consideri la relazione tra autovalori di $A$ e gli autovalori della matrice di iterazione).

4.2) Trovare il valore ottimale $m^*$, cioè il valore di $m$ per cui il raggio spettrale della matrice di iterazione associata al metodo iterativo sia minimo.

5) Dimostrare che una formula di quadratura è esatta per tutti i polinomi $p_n \in \mathbb{P}_n$ se e solo se è esatta $\forall\ x^k$, $k \leq n$.