1) Determinare il polinomio $p_2(x)$ che interpola $f(x) = \sin(x)$ nei nodi $x_0 = -a$, $x_1 = 0$, $x_2 = a$, $a \in (0,1]$.

1.1) Nel caso $a = 1$ fornire una maggiorazione dell'errore di interpolazione

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_2(x)|.$$

1.2) Determinare il valore ottimale del parametro $a \in (0,1]$ che rende minima la quantità

$$\max_{x\in[-1,1]} |\omega(x)|, \quad \omega(x) \equiv \prod_{i=0}^{2}(x - x_i).$$

Milano 2/5/18

x_i	$-a$	0	a
y_i	$-\sin a$	0	$\sin a$

$a \in (0,1]$

$$\begin{array}{lllll} -a & -\sin a & & & \\ & & \frac{\sin a}{a} & & \\ 0 & 0 & & 0 & \\ & & \frac{\sin a}{a} & & \\ a & \sin a & & & \end{array}$$

$$p_2(x) = -\sin a + \frac{\sin a}{a}(x+a) = \frac{\sin a}{a}\, x$$

$n = 2$; $n+1 = 3$; $a = 1$

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{3!} \max_{-1\leq t\leq 1} |(t-1)t(t+1)| \max_{-1\leq z\leq 1} |f'''(z)|$$

$\omega(t) = t^3 - t$ $\qquad \omega'(t) = 3t^2 - 1 = 0$ $\qquad t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\max_{-1\leq t\leq 1} |\omega(t)| = \left|\omega\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| = \left|\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\max_{-1\leq z\leq 1} |f'''(z)| = 1$$

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{6}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{27} \approx 0.06415$$

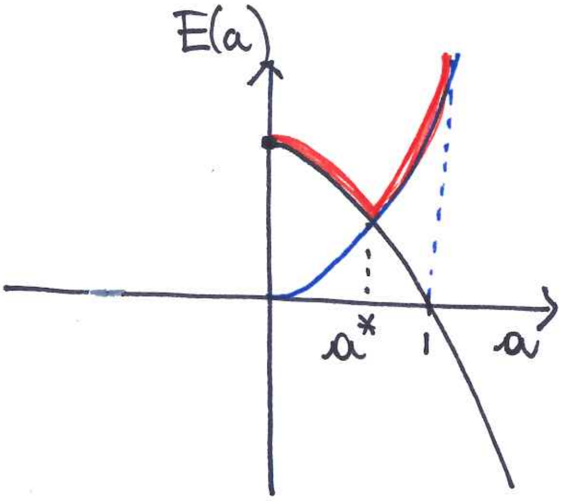
$$\omega(x) = (x-a)\,x\,(x+a) = x^3 - a^2 x \qquad a \in (0,1]$$

$$\omega'(x) = 3x^2 - a^2 \geq 0 \qquad x \leq -\frac{a}{\sqrt{3}} \;\cup\; x \geq \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\omega\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{a^3}{3\sqrt{3}} + \frac{a^3}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{a^3\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{9}a^3\sqrt{3}$$

$$\omega\left(+\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{9}a^3\sqrt{3}$$

$$\max_{x\in[-1,1]} |\omega(x)| = \overbrace{\max\left\{\frac{2}{9}a^3\sqrt{3}\,;\ 1-a^2\right\}}^{E(a)}$$



$$\min_{a\in(0,1]}\ \max_{x\in[-1,1]} |\omega(x)| = E(a^*)$$

a^* tale che $\quad 1-a^2 = \frac{2}{9}a^3\sqrt{3}$

$$2a^3\sqrt{3} + 9a^2 - 9 = 0$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad 2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\sqrt{3} + \frac{9\cdot 3}{4} - 9 = \frac{9}{4} + \frac{27}{4} - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nodi Gauss Chebyshev di P_3

2) Si consideri il seguente metodo iterativo

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{\beta}{x_n^2}\right)$$

con β parametro reale positivo. Trovare, al variare di β, i punti fissi dell'iterazione. Studiare la convergenza del metodo al variare di β e di $x_0 > 0$. Nel caso di convergenza determinare l'ordine del metodo.

Milano 2/5/18

$g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{\beta}{3x^2}$ $\quad \beta > 0 \quad x \neq 0$

$g(x) = x \quad x = \frac{2}{3}x + \frac{\beta}{3x^2} \quad 3x^3 = 2x^3 + \beta \quad x^3 = \beta \quad x = \sqrt[3]{\beta}$.

Asintoto verticale $x = 0$

obliquo $y = \frac{2}{3}x$

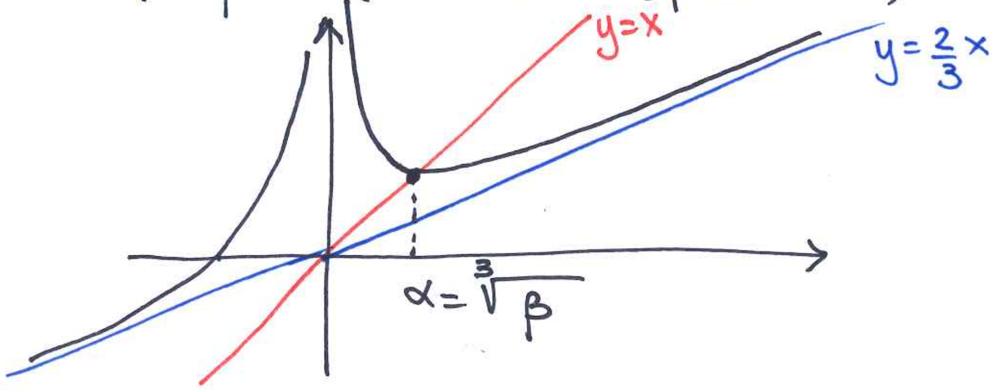
$g'(x) = \frac{2}{3} - \frac{2\beta}{3x^3} > 0 \quad 2\,\frac{x^3 - \beta}{3x^3} > 0 \quad x < 0 \cup x > \sqrt[3]{\beta}$

$$\begin{array}{c|ccccc} & & 0 & & \sqrt[3]{\beta} & \\ \hline g' & + & | & - & | & + \\ & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \end{array}$$

$g''(x) = \frac{2}{3}\beta\frac{3}{x^4} > 0 \quad x \neq 0$

$g'(\sqrt[3]{\beta}) = 0 \Rightarrow$ Convergenza 2° ordine

- $x_0 > \sqrt[3]{\beta}$ successione monotona decrescente limitata inferiormente: $x_n \searrow \sqrt[3]{\beta}$
- $0 < x_0 < \sqrt[3]{\beta} \quad x_1 > \sqrt[3]{\beta}$ (vedi caso precedente)



3) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Determinare tutti e soli i valori di a per i quali la matrice A è definita positiva. Rappresentare graficamente la quantità $\|A\|_1$ al variare di $a \in \mathbb{R}$. Studiare la convergenza del metodo di Jacobi e del metodo di Gauss Seidel al variare di $a \neq 0$.

Milano 2/5/2018

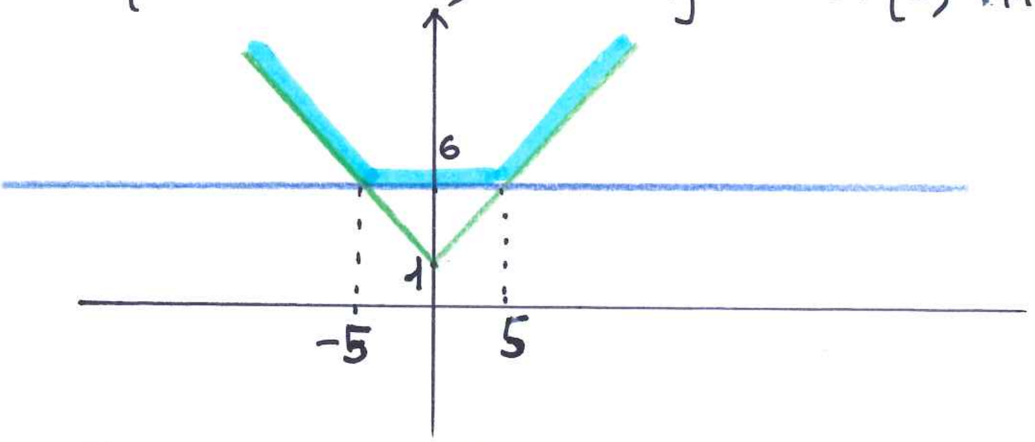
1) Definita positiva

$|A_1| = 4$; $|A_2| = 12 - 1 = 11$

$|A_3| = |A| = 4(3a) + 1(-a) + 1(-3) =$

$12a - a - 3 = 11a - 3 > 0 \quad a > \frac{3}{11}$

2) $\|A\|_1 = \max\{4+1+1 ; 1+3 ; 1+|a|\} = \max\{6 ; 1+|a|\}$



Se $|a| \geq 5 \Rightarrow \|A\|_1 = 1 + |a|$; se $|a| < 4 \Rightarrow \|A\|_1 = 6$

3) Convergenza del metodo di Jacobi $(a \neq 0)$

$$\det \begin{vmatrix} 4\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3\lambda & 0 \\ 1 & 0 & a\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$-3\lambda + a\lambda(12\lambda^2 - 1) = 0$

$\lambda[-3 + 12a\lambda^2 - a] = 0 \qquad \lambda = 0$

$$\lambda^2 = \frac{a+3}{12a}$$

4) Convergenza del metodo di Gauss-Seidel

$$\det \begin{vmatrix} 4\lambda & -1 & 1 \\ -\lambda & 3\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & a\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda(-3\lambda) + a\lambda(12\lambda^2 - \lambda) = 0$$

$$-3\lambda^2 + 12a\lambda^3 - a\lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2(12a\lambda - 3 - a) = 0 \qquad \lambda = 0$$

$$\lambda = \frac{a+3}{12a}$$

$$\rho(B_{GS}) = \left| \frac{a+3}{12a} \right|$$

Il metodo di Gauss-Seidel converge se e solo se converge il metodo di Jacobi.

Inoltre $R(B_{GS}) = 2R(B_J)$ essendo

$$\rho(B_{GS}) = \rho^2(B_J)$$

Se $-3 < a < 0$ $\quad \lambda = \pm \sqrt{\left|\frac{a+3}{12a}\right|}\, i$

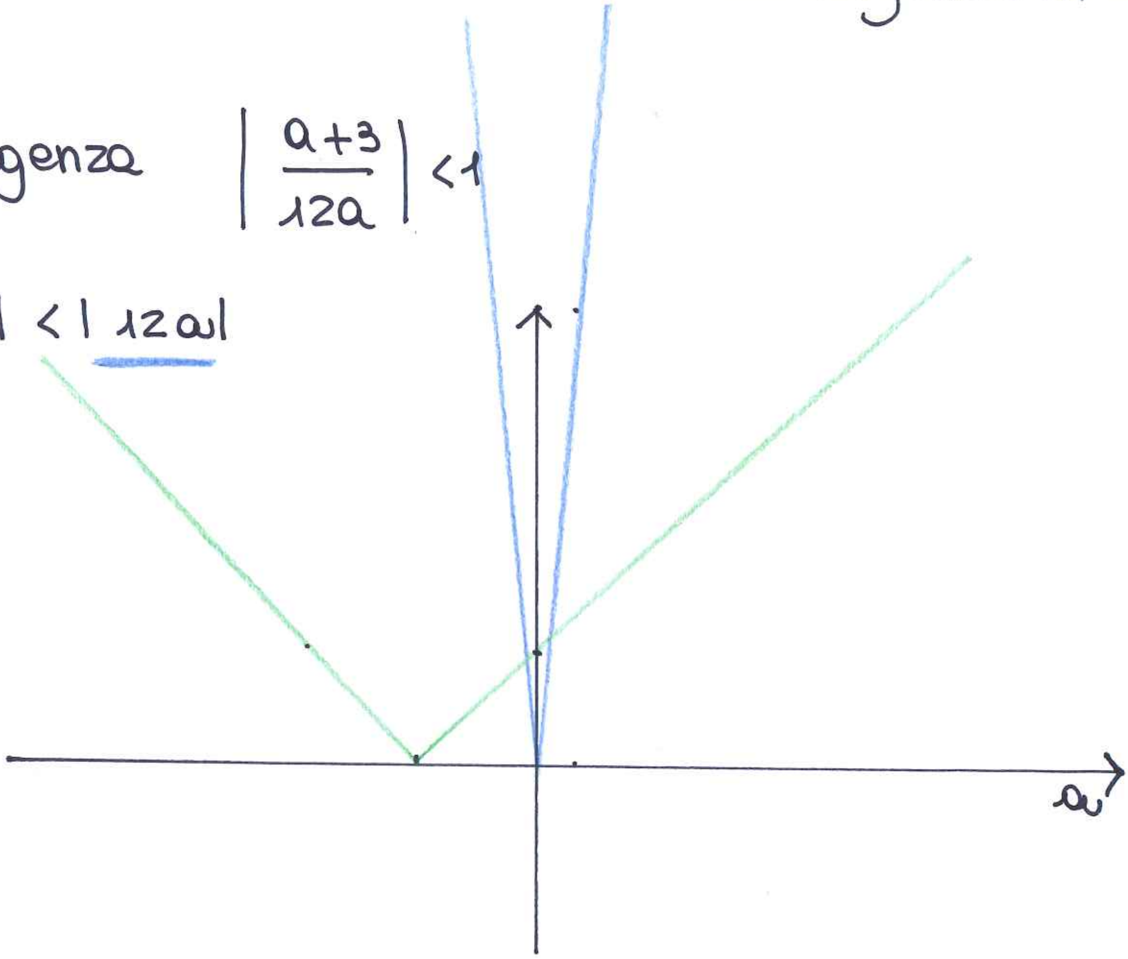
Se $\quad a < -3 \vee a > 0 \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{a+3}{12a}}$

$\left.\right\} \rho(B_J) = \sqrt{\left|\frac{a+3}{12a}\right|}$

$a = -3 \quad \lambda = 0 \Rightarrow \rho(B_J) = 0$ (Caso ottimale, convergenza in 1 iterazione)

Convergenza $\left|\frac{a+3}{12a}\right| < 1$

$|a+3| < |12a|$



$a + 3 = 12a \quad a = \frac{3}{11}$

$a + 3 = -12a \quad a = -\frac{3}{13}$

$\Rightarrow |a+3| < |12a| \Leftrightarrow \rho(B_J) < 1 \Leftrightarrow$

$a < -\frac{3}{13} \cup a > \frac{3}{11}$

4) Si considerino i punti $(-2,-1)$, $(-1,1)$, $(0,2)$, $(1,-1)$, $(2,1)$, determinare la funzione costante $p(x) = C$ e la funzione $q(x) = a + bx^2$ che approssimino tali punti nel senso dei minimi quadrati. Quale polinomio tra p e q realizza la migliore approssimazione?

Milano (Matematica) 2/5/18

						$\sum$
x_i	-2	-1	0	1	2	0
y_i	-1	1	2	-1	1	2
x_i^2	4	1	0	1	4	10
x_i^4	16	1	0	1	16	34
$x_i^2 y_i$	-4	1	0	-1	4	0

1) $p(x) = C \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i = \frac{1}{5}\cdot 2$

$$y_i - C = \left\{-\frac{7}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{3}{5}\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{5}(y_i - C)^2 = \frac{1}{25}\left\{49\cdot 2 + 9\cdot 2 + 64\right\} = \frac{1}{25}\left(98 + 18 + 64\right) =$$

$$\frac{180}{25} = 7.2$$

2) $E(a,b) = \sum_{i=1}^{5}\left[y_i - a - bx_i^2\right]^2$

$$\frac{\partial E(a,b)}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{5}\left[y_i - a - bx_i^2\right](-1) = 0 \qquad 5a + \left(\sum_{i=1}^{5} x_i^2\right)b = \sum_{i=1}^{5} y_i$$

$$\frac{\partial E(a,b)}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{5}\left[y_i - a - bx_i^2\right](-x_i^2) = 0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{5} x_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^{5} x_i^4\right)b = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_i$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5a + 10b = 2 \\ 10a + 34b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 10a + 20b = 4 \\ 10a + 34b = 0 \end{cases} \quad 14b = -4 \quad b = -\frac{2}{7}$$

$$\begin{cases} 10a + 34\left(-\frac{2}{7}\right) = 0 \\ b = -\frac{2}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{68}{70} \\ b = -\frac{2}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{34}{35} \\ b = -\frac{2}{7} \end{cases} \quad q(x) = \frac{34}{35} - \frac{2}{7}x^2$$

$$q(\pm 2) = \frac{34}{35} - \frac{8}{7} = \frac{-6}{35}$$

$$q(0) = \frac{34}{35}$$

$$q(\pm 1) = \frac{34}{35} - \frac{2}{7} = \frac{24}{35}$$

$$\sum_{i=1}^{5} \left[y_i - q(x_i)\right]^2 = \left(-1 + \frac{6}{35}\right)^2 + \left(1 - \frac{24}{35}\right)^2 + \left(2 - \frac{34}{35}\right)^2 + \left(-1 - \frac{24}{35}\right)^2 + \left(1 + \frac{6}{35}\right)^2$$

$$\left(-\frac{29}{35}\right)^2 + \left(\frac{11}{35}\right)^2 + \left(\frac{36}{35}\right)^2 + \left(-\frac{59}{35}\right)^2 + \left(\frac{41}{35}\right)^2 =$$

$$(841 + 121 + 1296 + 3481 + 1681)\frac{1}{1225} = \frac{7420}{1225} = \frac{1484}{245} = \frac{212}{35}$$

$$\approx 6.0571$$