CALCOLO NUMERICO 1 (2 Maggio 2018) - Prova scritta

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

1) Determinare il polinomio $p_2(x)$ che interpola $f(x) = \sin(x)$ nei nodi $x_0 = -a$, $x_1 = 0$, $x_2 = a$, $a \in (0, 1]$.

1.1) Nel caso $a = 1$ fornire una maggiorazione dell'errore di interpolazione

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_2(x)|.$$

1.2) Determinare il valore ottimale del parametro $a \in (0, 1]$ che rende minima la quantità

$$\max_{x\in[-1,1]} |\omega(x)|, \quad \omega(x) \equiv \prod_{i=0}^{2}(x - x_i).$$

2) Si consideri il seguente metodo iterativo

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{\beta}{x_n^2}\right)$$

con β parametro reale positivo. Trovare, al variare di β, i punti fissi dell'iterazione. Studiare la convergenza del metodo al variare di β e di $x_0 > 0$. Nel caso di convergenza determinare l'ordine del metodo.

3) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Determinare tutti e soli i valori di a per i quali la matrice A è definita positiva. Rappresentare graficamente la quantità $\|A\|_1$ al variare di $a \in \mathbb{R}$. Studiare la convergenza del metodo di Jacobi e del metodo di Gauss Seidel al variare di $a \neq 0$.

4) Si considerino i punti $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(0, 2)$, $(1, -1)$, $(2, 1)$, determinare la funzione costante $p(x) = C$ e la funzione $q(x) = a + bx^2$ che approssimino tali punti nel senso dei minimi quadrati. Quale polinomio tra p e q realizza la migliore approssimazione?

5) Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ con $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, con uno zero z, $f(z) = 0$. Dimostrare che z è unico e che il metodo di Newton converge a z per ogni scelta di x_0.