1) Data la funzione $g(x) = \frac{x(x^2+12)}{3x^2+4}$

1.1) trovare i suoi punti fissi;

1.2) studiare la convergenza e l'ordine del metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$, al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$.

MILANO 2-5-2019

Funzione dispari, $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) > 0 \quad x > 0$; $f(x) = 0$, $x = 0$.

Punti fissi: $x^3 + 12x = x(3x^2+4)$

$x^3 + 12x = 3x^3 + 4x$

$2x^3 - 8x = 0 \qquad x = 0 \quad x = \pm 2$

ASINTOTO OBLIQUO

$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 12x}{3x^3 + 4x} = \frac{1}{3}$ $\qquad q = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3+12x}{3x^2+4} - \frac{1}{3}x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{3x^3} + 36x - \cancel{3x^3} - 4x}{3(3x^2+4)} = 0$

$y = \frac{1}{3}x$

$g'(x) = \frac{(3x^2+12)(3x^2+4) - (x^3+12x) \cdot 6x}{(3x^2+4)^2} = \frac{9x^4 + 36x^2 + 12x^2 + 48 - 6x^4 - 72x^2}{(3x^2+4)^2} =$

$\frac{3x^4 - 24x^2 + 48}{(3x^2+4)^2} = \frac{3(x^4 - 8x^2 + 16)}{(3x^2+4)^2} = 3\frac{(x^2-4)^2}{(3x^2+4)^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$= 0 \quad x = \pm 2$ (molt. doppia)

TG ORIZZ.

C. Suff. ~~per~~ convergenza

$g'(0) = 3 \cdot \frac{16}{16} = 3 > 1$ DIVERGENZA LOCALE

$g'(\pm 2) = 0$ (molt. doppia)

[$g''(\pm 2) = 0$ molt. semplice

$g'''(\pm 2) \neq 0$ $\Downarrow$ 3° ordine)

$$g''(x) = 3 \cdot \frac{2(x^2-4)\cdot 2x\,(3x^2+4)^2 - (x^2-4)^2 \cdot 2 \cdot (3x^2+4)\cdot 6x}{(3x^2+4)^4} =$$

$$3 \cdot \frac{4x\,(x^2-4)(3x^2+4)\left[3x^2+4-3x^2+12\right]}{(3x^2+4)^4} =$$

$$= \frac{12x\,(x^2-4)}{(3x^2+4)^3}\,(16) = \frac{192x\,(x^2-4)}{(3x^2+4)^3} \geq 0$$

		-2		0		2	
	$-$		$-$	0	$+$		$+$
	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
g''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

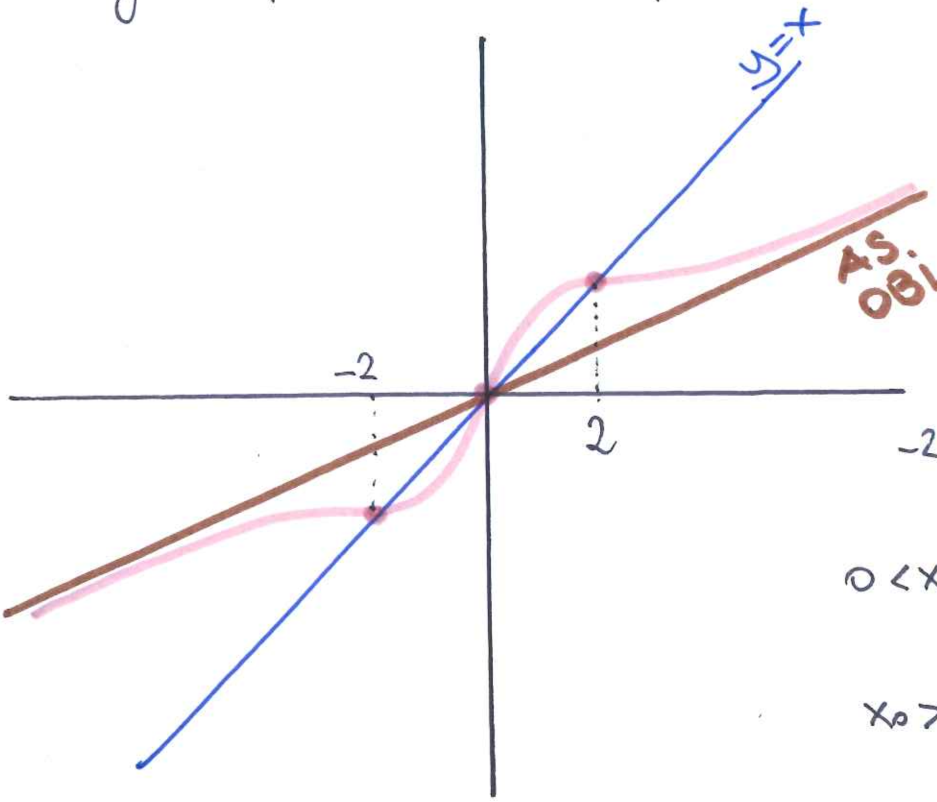
$g''(x)$ ha 3 radici semplici (nei p. fissi)

$\Downarrow$

$g'''(\pm 2) \neq 0$

$g''(\pm 2) = g'(\pm 2) = 0$

3° ORDINE



$x_0 < -2$ succ. mon cresc. lim sup da -2

$-2 < x_0 < 0$ succ. mon decr lim inf da -2

$0 < x_0 < 2$ succ. mon cresc lim sup da $+2$

$x_0 > 2$ succ. mon decr lim inf da $+2$

RIEPILOGO:

$x_0 < 0$	$x_n \to -2$
$x_0 > 0$	$x_n \to +2$
$x_0 = 0$	$x_n = 0 \quad \forall n$
$x_0 = 2$	$x_n = 2 \quad \forall n$
$x_0 = -2$	$x_n = -2 \quad \forall n$

2) Data la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

nel caso in cui A sia non singolare:

2.1) determinare tutti e soli i valori di α per i quali il metodo di Jacobi converge;

2.2) determinare tutti e soli i valori di α per i quali il metodo di Gauss-Seidel converge;

2.3) confrontare la velocità asintotica dei due metodi.

MILANO 2-5-2019

$\det A = 2(3+2) - \alpha(9) \neq 0$ (A non singolare)

$\alpha \neq \frac{10}{9}$

2.1) $\det \begin{bmatrix} 2\lambda & \alpha & 0 \\ 3 & \lambda & 1 \\ 0 & -2 & 3\lambda \end{bmatrix} = 2\lambda(3\lambda^2+2) - \alpha(9\lambda) = 6\lambda^3 + 4\lambda - 9\alpha\lambda = 0$

$\lambda(6\lambda^2 + 4 - 9\alpha) = 0$ $(\lambda = 0)$

$6\lambda^2 = 9\alpha - 4$ $\quad \lambda^2 = \frac{9\alpha-4}{6}$ $\quad \alpha \geq \frac{4}{9}$ $\quad \lambda = \pm\sqrt{\frac{9\alpha-4}{6}}$

$\alpha < \frac{4}{9}$ $\quad \lambda = \pm i\sqrt{\frac{|9\alpha-4|}{6}}$

$\rho(B_J) = \sqrt{\frac{|9\alpha-4|}{6}} < 1$ $\quad |9\alpha-4| < 6$

$-6 < 9\alpha - 4 < 6$

$-2 < 9\alpha < 10$

$-\frac{2}{9} < \alpha < \frac{10}{9}$

2.2) La matrice è tridiagonale, il metodo di GS converge se e solo se converge il metodo di J. $\Rightarrow -\frac{2}{9} < \alpha < \frac{10}{9}$

2.3) $R(B_{GS}) = 2R(B_J)$ essendo

$\rho(B_J) = \sqrt{\frac{|9\alpha-4|}{6}}$

$\rho(B_{GS}) = \frac{|9\alpha-4|}{6}$

3) Data la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & -(1+\varepsilon) \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; 0 < \varepsilon < 1$$

calcolare $K_\infty(A)$ in funzione di ε.

MILANO 2-5-2019

$$\det A = -1 + \varepsilon + 1 + \varepsilon = 2\varepsilon \neq 0 \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2\varepsilon} \begin{bmatrix} -1 & 1+\varepsilon \\ -1 & 1-\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \max\{|1-\varepsilon| + |1+\varepsilon| ; 2\} = \max\{1 - \cancel{\varepsilon} + 1 + \cancel{\varepsilon} ; 2\} = 2$$

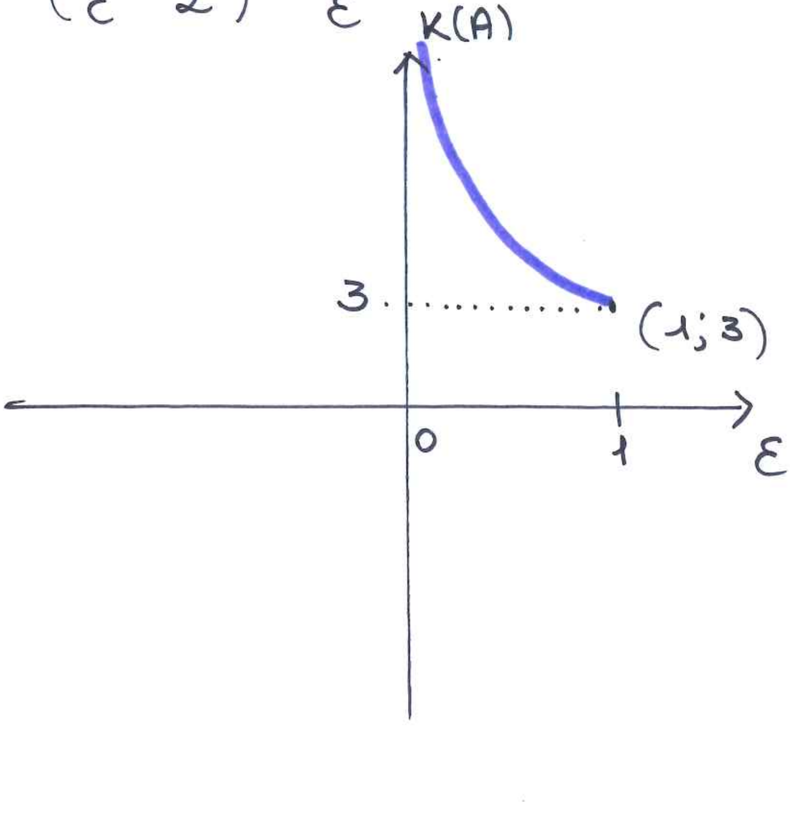
$$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{2\varepsilon} \max\{1 + |1+\varepsilon| ; 1 + |1-\varepsilon|\} = \frac{1}{2\varepsilon} \max\{1+1+\varepsilon ; 1+1-\varepsilon\} =$$

$$\frac{1}{2\varepsilon} \max\{2+\varepsilon ; 2-\varepsilon\} = \frac{1}{2\varepsilon} \cdot (2+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}$$

$2+\varepsilon > 2-\varepsilon$

$\varepsilon > 0$

$$K_\infty(A) = 2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} + 1$$



4) Si consideri la formula di quadratura

MILANO 2-5-2019

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1).$$

4.1) Determinare $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ in modo tale che la formula di quadratura abbia grado di precisione massimo. Quale è il grado di precisione della formula ottenuta?

4.2) Utilizzando i valori ottenuti al punto 4.1) si consideri ora la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx af(-x_0) + bf(x_0) + cf'(-x_0) + df'(x_0),$$

e si determini $x_0 \in \mathbb{R}$ in modo tale che la formula di quadratura abbia grado di precisione massimo. Quale è il grado di precisione della formula ottenuta?

- $f = 1 \quad f' = 0 \quad (x = 0)$

$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \qquad$ FQ: $a + b \qquad \Rightarrow a + b = 2 \qquad 1^e$

- $f = x \quad f' = 1 \quad (x = 1)$

$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \qquad$ FQ: $-a + b + c + d = 0 \Rightarrow -a + b + c + d = 0 \qquad 2^e$

- $f = x^2 \quad f' = 2x \quad (x = 2)$

$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} \qquad$ FQ: $a + b - 2c + 2d \quad \Rightarrow a + b - 2c + 2d = \frac{2}{3} \qquad 3^e$

- $f = x^3 \quad f' = 3x^2 \quad (x = 3)$

$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 \qquad$ FQ: $-a + b + 3c + 3d \Rightarrow -a + b + 3c + 3d = 0 \qquad 4^e$

$2^a - 4^a \Rightarrow -2c - 2d = 0 \Rightarrow c = -d$

$1^a \Rightarrow a = 2 - b$

$$\begin{matrix} 2^e \\ 3^e \end{matrix}\begin{cases} -2 + b + b - \cancel{d} + \cancel{d} = 0 \\ +2 - b + b + 2d + 2d = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} b = 1 \\ 4d = \frac{2}{3} - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 1 \\ d = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = \frac{1}{3} \end{cases}$$

4.2) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f(-x_0) + f(x_0) + \frac{1}{3}f'(x_0) - \frac{1}{3}f'(x_0)$

- $x = 0 \quad \forall x_0$
- $x = 1 \quad \forall x_0$
- $x = 2 \quad f = x^2 \quad f' = 2x \Rightarrow$

$$x_0^2 + x_0^2 - \frac{2}{3}x_0 - \frac{2}{3}x_0 = \frac{2}{3}$$
$$6x_0^2 - 4x_0 - 2 = 0$$
$$3x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0$$

$\Rightarrow x_0 = 1 \lor x_0 = -\frac{1}{3}$

$\Downarrow$

formula 4.1) (ovvio)

Inoltre si verifica: 4.1) G.P. 3

4.2) G.P. 3

5) Determinare per quali valori di x_0 e $x_1 \in \mathbb{R}$ esiste uno ed unico polinomio $p \in \mathbb{P}_3$ tale che

$$p(x_0) = y_0, \; p(0) = y_1, \; p'(0) = y_2, \; p(x_1) = y_3,$$

per ogni insieme di dati $y_0, \; y_1, \; y_2, \; y_3 \in \mathbb{R}$.

MILANO 2-5-19

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\begin{cases} ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = y_0 \\ d = y_1 \\ c = y_2 \\ ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = y_3 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}_{\underline{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{\underline{y}}$$

$$A \underline{a} = \underline{y}$$

$$\det A \neq 0$$

$$\det \begin{bmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_1^3 & x_1^2 & x_1 \end{bmatrix} \neq 0 \qquad -\left(x_0^3 x_1^2 - x_0^2 x_1^3\right) \neq 0$$

$$x_0^2 x_1^2 (x_0 - x_1) \neq 0$$

$$x_0 \neq 0 \;\wedge\; x_1 \neq 0 \;\wedge\; x_0 \neq x_1$$