CALCOLO NUMERICO (2 maggio 2019)

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Data la funzione $g(x) = \frac{x(x^2+12)}{3x^2+4}$

   1.1) trovare i suoi punti fissi;

   1.2) studiare la convergenza e l'ordine del metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$, al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$.

2) Data la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

nel caso in cui A sia non singolare:

   2.1) determinare tutti e soli i valori di α per i quali il metodo di Jacobi converge;

   2.2) determinare tutti e soli i valori di α per i quali il metodo di Gauss-Seidel converge;

   2.3) confrontare la velocità asintotica dei due metodi.

3) Data la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & -(1+\varepsilon) \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ 0 < \varepsilon < 1$$

calcolare $K_\infty(A)$ in funzione di ε.

4) Si consideri la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x) \ \mathrm{d}x \ \approx af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1).$$

   4.1) Determinare $a, \ b, \ c, \ d \in \mathbb{R}$ in modo tale che la formula di quadratura abbia grado di precisione massimo. Quale è il grado di precisione della formula ottenuta?

   4.2) Utilizzando i valori ottenuti al punto 4.1) si consideri ora la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x) \ \mathrm{d}x \ \approx af(-x_0) + bf(x_0) + cf'(-x_0) + df'(x_0),$$

   e si determini $x_0 \in \mathbb{R}$ in modo tale che la formula di quadratura abbia grado di precisione massimo. Quale è il grado di precisione della formula ottenuta?

5) Determinare per quali valori di x_0 e $x_1 \in \mathbb{R}$ esiste uno ed unico polinomio $p \in \mathbb{P}_3$ tale che

$$p(x_0) = y_0, \ p(0) = y_1, \ p'(0) = y_2, \ p(x_1) = y_3,$$

per ogni insieme di dati $y_0, \ y_1, \ y_2, \ y_3 \in \mathbb{R}$.