

CALCOLO NUMERICO - (14 novembre 2005)

- 1) E' dato il problema di punto fisso

$$x_{n+1} = \frac{\pi}{2} \sin(x_n), \quad n \geq 0, \quad x_0 \text{ assegnato.}$$

Si dica quali sono i punti fissi e si studi la convergenza delle iterate. In particolare, si indichi a quale dei punti fissi converge la successione degli x_n in funzione del punto iniziale x_0 . Inoltre, si indichi quale è l'ordine di convergenza ai punti fissi.

- 2) Determinare la spline di grado 1 interpolante il polinomio

$$p_2(x) = -0.5x^2 + 1.5x - 1$$

nei punti $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Stimare il massimo errore che si commette sull'intervallo $[0, 3]$.

- 3) E' dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

con a parametro reale e \mathbf{b} termine noto assegnato. Trovare

- 3.1) il raggio spettrale della matrice di iterazione associata al metodo di Jacobi applicato al sistema lineare;
 - 3.2) il raggio spettrale della matrice di iterazione associata al metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema lineare;
 - 3.3) per quali valori di a il metodo di Gauss-Seidel converge.
- 4) Discutere in generale il condizionamento del calcolo di una funzione f in un punto x . Studiare il condizionamento del calcolo della funzione $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ e determinare i valori di x per i quali il calcolo della funzione è malcondizionato nel senso che il numero di condizionamento risulta superiore a 10.
- 5) Determinare x_0 , x_1 , c_1 in modo che la formula di quadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

abbia grado di precisione massimo e applicare la formula ottenuta al calcolo dell'integrale definito

$$\int_{-1}^1 |x| dx.$$

Commentare i risultati ottenuti.