CALCOLO NUMERICO (15 novembre 2007)

1) Trovare il numero di condizionamento $K(x)$ della funzione

$$y = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Si mostri che $a < K(x) \leq b$, indicando i valori di a e b. Dimostrare che la funzione $K : \mathbb{R} \to (a, b]$ ammette un unico punto fisso nell'intervallo $(0, 1)$.

2) Calcolare il polinomio $p(x)$ di interpolazione dei dati $(0, a)$, $(1, b)$, $(2, c)$, in funzione di a, b e c.

2.1) Calcolare $p'(x)$, e determinare quale relazione deve sussistere fra i parametri a, b e c affinchè $p'(x)$ risulti costante. In questo caso particolare, cosa succede ai tre punti $(0, a)$, $(1, b)$, $(2, c)$?

2.2) Posto $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$, e $a = f(0)$, $b = f(1)$, $c = f(2)$, ricavare l'espressione di $p(x)$ in questo caso particolare, verificare che $p(x)$ interpola f nei tre punti assegnati, e scrivere la formula di rappresentazione dell'errore $r(x) = f(x) - p(x)$.

3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^4$, e

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 2 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

3.1) fornire una condizione necessaria e sufficiente su k affinchè la matrice A sia non singolare;

3.2) fornire una condizione necessaria e sufficiente su k affinchè il metodo di Jacobi converga;

3.3) fornire una condizione necessaria e sufficiente su k affinchè il metodo di Gauss-Seidel converga;

3.4) nel caso in cui entrambi i metodi convergano, quale relazione sussiste tra le velocità di convergenza dei due metodi?