

CALCOLO NUMERICO (16 novembre 2009)

- 1) Si scriva una function Matlab che, dati in input una funzione f , due numeri reali a, b e un intero m , approssimi l'integrale definito

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

con la formula del punto medio composita.

- 2) La funzione

$$g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{x^2},$$

ha un punto fisso in $\sqrt[3]{3}$. La funzione ha altri punti fissi? Si studi graficamente la convergenza del metodo iterativo

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad x_0 \text{ assegnato},$$

e il relativo ordine di convergenza.

- 3) Si consideri la formula di quadratura

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{9}{4}hf(a+h) + \frac{3}{4}hf(b),$$

dove $h = (b-a)/3$ e $b > a$. Si dimostri che la formula ha grado di precisione almeno 2. Si calcoli il grado di precisione della formula.

- 4) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$:

- 4.1) A è non singolare;
 - 4.2) A è strettamente diagonalmente dominante;
 - 4.3) Il metodo di Jacobi applicato alla matrice A è convergente.
 - 4.4) Il metodo di Gauss-Seidel applicato alla matrice A è convergente.
- 5) Dimostrare che la funzione $s : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$s(x) = \begin{cases} 3(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3 & x \in [1, 2) \\ 4 + 4(x-2) - (x-2)^2 + \frac{1}{3}(x-2)^3 & x \in [2, 3] \end{cases}$$

è una spline cubica sulla suddivisione $\{1, 2, 3\}$. Dire se è naturale e calcolare $s'(1.5)$ e $s'(2.25)$.