

CALCOLO NUMERICO 1 (17 novembre 2011) - Prima prova in itinere

- 1) Studiare il condizionamento $K_f(x)$ della funzione $y = \log(x+1)^2$ e stabilire se per $|x| > 3$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 10$.

- 2) Data la funzione $\phi(x) = 3 \sin(2\pi x)$:
 - 2.1) calcolare il polinomio p_2 che interpola ϕ nei nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$ e $x_2 = \frac{3}{4}$ e il polinomio p_3 che interpola ϕ nei nodi x_0 , x_1 , x_2 e $x_3 = \frac{1}{2}$;
 - 2.2) fornire una maggiorazione dell'errore $\max_{x \in [0,1]} |\phi(x) - p_2(x)|$;
 - 2.3) calcolare la formula di quadratura interpolatoria relativa ai nodi x_0 , x_1 , x_2 per l'approssimazione dell'integrale definito $\int_0^1 f(x) dx$. Qual è il suo grado di precisione?

- 3) Stimare il numero minimo di sottointervalli di uguale ampiezza in cui si deve suddividere l'intervallo $[0, 2\pi]$, affinché l'errore che si commette interpolando con una spline lineare la funzione $f(x) = e^{-x} \cos x$ sia minore di 10^{-2} . Trovare la formula di quadratura composita corrispondente. Di che formula si tratta?

- 4) Dimostrare che se $f \in C^2[a, b]$, $x_1, x_2, x \in [a, b]$, allora $\exists \xi \in [a, b]$ tale che

$$f[x_1, x_2, x] = \frac{f''(\xi)}{2!}.$$