CALCOLO NUMERICO 1 (22 Novembre 2012) - Prima prova in itinere

1) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$$

e stabilire per quali x il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 10$.

2) Si consideri la funzione $f(x) = 1 + 4xe^{(2x)}$, $x \in [0, 3/2]$,

1. trovare il polinomio che interpoli la funzione f nei nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3/2$;
2. trovare la spline lineare interpolante scegliendo come nodi della suddivisione dell'intervallo $[0, 3/2]$ i nodi del punto precedente;
3. stimare il numero M di sottointervalli di uguale ampiezza necessari per approssimare la funzione f con una spline lineare interpolante a meno di un errore di 10^{-2}.

3) Determinare i coefficienti a_0, a_1, b_0, b_1 in modo che la formula di quadratura:

$$\int_0^h f(x)\mathrm{d}x \approx h[a_0 f(0) + a_1 f(h)] + h^2[b_0 f'(0) + b_1 f'(h)]$$

sia esatta per polinomi di grado 3.

Applicare la formula trovata all'integrale definito

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \ \mathrm{d}x.$$

Utilizzando la stima asintotica dell'errore, stimare quanti sottointervalli sono necessari affinchè l'errore assoluto relativo all'approssimazione di I con il metodo dei trapezi compositi sia inferiore a 10^{-3}.

4) Siano assegnati $(N+1)$ punti distinti appartenenti ad un intervallo $[a, b]$: x_0, x_1 $\dots$, x_N. Si indichi con $L_i(x)$ il polinomio di Lagrange corrispondente al punto x_i. Dimostrare che

$$\sum_{i=0}^{N} L_i(x) = 1.$$